

非線形波的數值計算

周宗仁* 岳景雲** 翁文凱***

一、前 言

波的非線形性即其有限振幅性，對波本身的特性有很大的影響。自古即有很多學者以不同的理論欲加以分析，近年來由於電子計算機的發達，亦有很多學者以數值計算方法加以分析，至目前為止，已有相當多的研究成果被發表，但是還沒有定論。除了在波浪理論的研究上有探討波浪非線性問題的必要外，在工程應用上，例如波浪作用於結構物所產生的波壓，因海岸地形變化或結構物的存在而引起波的變形，如分裂、反射等現象，微小振幅波理論不但有其適用範圍的限制，而且無法解析因波的能量交換所引起的分裂現象。然而對此問題欲以純理論方法分析，在目前尚有困難，一般均以各種理論推導至某一程度後，就必須仰賴數值計算方法加以分析。

目前，可適用的數值計算方法大約有差分法、有限元素法及邊界元素法等。本文將針對邊界元素法說明其適用於分析非線形波的可行性。作者首先於1977年⁽¹⁾曾對等水深海域中，有不透水岸壁存在而形成重複波的問題，先採用微變法展開至第2項後，再分別對各項以邊界元素法利用數值計算求解，但發現數值解非常容易產生發散現象，必須採用相當多的節點，才能勉強得到結果。即使如此，也只對直立岸壁的情況得到一點結果，當岸壁為傾斜時無法得到良好的結果。爾後⁽²⁾⁽³⁾改以非定常解的方式，首先求出微小振幅波的解，並視其為初期值，將自由水面的非線形條件以差分方式差分後，對時間逐次利用邊界元素法求該時刻的非線形解，曾對陡坡度的岸壁得到結果，但是對緩坡度的岸壁則因為必須使用大量的節點，才能得到良好的結果，由於計算節點數的增加，非常容易發生發散的現象，因此無法廣泛使用。

作者最近在實驗中，發現在海域中設置水平板⁽⁴⁾會使波浪產生分裂而達到減波的效果，但是在理論分析上若只採用微小振幅波理論則無法得到分裂的效應因此必須考慮自由水面的非線形邊界條件。在進行數值分析時遭遇到兩個問題，其一為邊界端點處的節點在幾何學上為不連續的特異點，其二為在端點處的節點上同時有兩個不同的邊界條件存在。

* 國立臺灣海洋學院河海工程學系教授

** 國立交通大學土木工程研究所博士班研究生

國立臺灣海洋學院河海工程學系講師

*** 國立臺灣海洋學院河海工程學系助教

本文將說明如何改善數值計算的方法，以等水深二次度有限水域中的非線形進行波及垂直岸壁存在而引起的重複波為例，並與現有的理論作比較，以證明本數值計算方法的正確性。

二、Green函數及其數值計算

如圖 1 所示，領域 D 係由邊界線 S_1 、 S_2 、 S_3 … 等曲線閉合而成。在各邊界線上其邊界條件各為不同。若只考慮微小振幅波解時，通常採用一定元素加以分割，即可得到相當精確的數值解。此時若採用一次元素（線形元素），在數值計算的條件不變下，在理論上其精確度應高於一定元素者。但是若以圖 2 所示的有限水深領域為例，在邊界線 S_1 上的邊界條件為輻射條件， S_2 上為自由水面條件

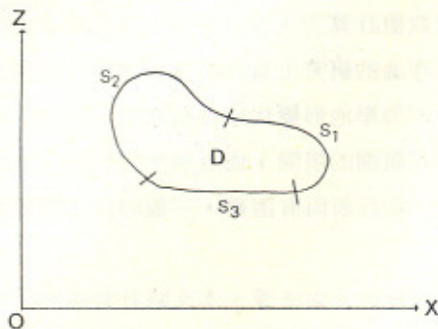


圖 1 定義圖

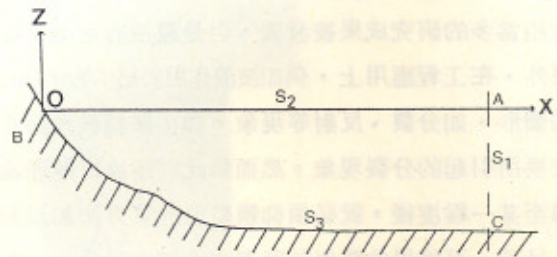


圖 2 二次度有限水深領域圖

，在 S_3 上的條件則為法線方向的流速為零。若採用一定元素時，由於係以各元素的中點的值作為代表值，則 A 、 B 、 C 等端點處的元素上的邊界條件各只有一個，而幾何學上的不連續性所引起的誤差，只會對端點附近的元素產生局部性的誤差，對微小振幅波解整體不會產生影響。

當考慮非線形波問題時，在數值計算理論上分割元素至少必須為一次以上的元素所構成，此時在 A 、 B 、 C 等端點處均有節點存在，這些節點上除了有二個不同的邊界條件同時存在外，在幾何學上亦為不連續的特異點，因此若不加以妥善處理所得結果可能會比採用一定元素者為差。

由於本研究的目的是在於解析波運動所引起的速度勢、波形及波壓等物理量，而速度勢為無向量，因此以圖 3 所示的端點 A 為例，若 S_1 上的端點以 A' ，而 S_2 上的端點以 A'' 表示時，當 A' 及 A'' 趨近於 A 時， A' 節點的速度勢與 A'' 節點的速度勢應為等值，而且兩者之和應與只有 A 點存在時的速度勢相等，因此可將 A 節點以 A' 及 A'' 兩節點表示。如此 A' 及 A'' 節點上的邊界條件各只有一個，而且因幾何學上的不連續所引起的特異性亦可以消除，因此只要採用少數的計算節點（每個波長 16 點以上）即可得到精度良好的數值解。

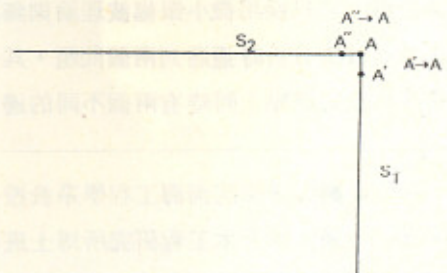


圖 3 端點元素放大圖

本文對 Green 函數以線形元素進行數值計算時，對各端點作了上述的修正（即對各端點處節點上與速度勢有關的係數值取其一半）外，其他部份與文獻⁽²⁾⁽³⁾⁽⁵⁾中所述相同，因此本文只列出最後的公式如下。

$$[\Phi] = [O][\bar{\Phi}] \dots\dots\dots(1)$$

$$[O] = [H+1]^{-1}[G] \dots\dots\dots(2)$$

$$[\Phi] = \Phi_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots(3)$$

$$[\bar{\Phi}] = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots(4)$$

$$[I] = \text{單位矩陣} \dots\dots\dots(5)$$

而 [H]、[G]、[O] 等為係數矩陣（請參照文獻），N 為全部節點數。

三、邊界條件及其差分法

(1) 自由水面的動力及運動學邊界條件分別表示如下。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\zeta = 0 \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots\dots\dots(7)$$

(2) 無限遠處的輻射條件

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mp \frac{1}{C} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad x \rightarrow \pm \infty \quad C \text{ 為波速} \dots\dots\dots(8)$$

(3) 不透水海底的法線方向流速為零的條件

$$\bar{\Phi} = \partial \Phi / \partial n = 0 \dots\dots\dots(9)$$

對(1)及(2)所示條件可以下列差分式表⁽²⁾⁽³⁾。

$$\zeta_{j+1}^k = \zeta_j^k + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\cos \beta^{k+1}} \Phi_{j+1}^{k+1} + \frac{1}{\cos \beta^k} \Phi_{j+1}^k \dots\dots\dots(10)$$

$$\Phi_{j+1}^{k+1} = \frac{1-C}{b} \Phi_{j+1}^{k+1} + \frac{c}{b} \Phi_{j+1}^k - \frac{a}{b} \dots\dots\dots(11)$$

$$\Phi_{j+1}^{k+1} = \mp d \mp e \Phi_{j+1}^{k+1} \quad x \rightarrow \pm \infty \dots\dots\dots(12)$$

而 a 、 b 、 \dots 、 e 、 β 等值如文獻⁽²⁾⁽³⁾所示。

四、非線形進行波

(1) 微小振幅波

如圖 4 所示，若一定的有限水深 h 之海域中，振幅為 ζ_0 週頻率為 σ 的波存在時，當流體為非黏性非壓縮性的理想流體，而流體運動為非回轉運動時，流體運動具有 $\Phi(x, z; t) = g \zeta_0 / \sigma \cdot \Phi(x, z) \cdot \exp(i\sigma t)$ 的形式速度勢 (g 為重力加速度)。

將第 3 節所述自由水面邊界條件的非線形項省略後，與其他邊界條件代入(1)可得邊界線上各節點的微小振幅波速度勢值的連立一次方程式如下⁽⁶⁾。

$$\begin{bmatrix} O_{11}F' - I & O_{12}\frac{\sigma^2}{g} & O_{13}R' & 0 \\ O_{21}F' & O_{22}\frac{\sigma^2}{g} - I & O_{23}R' & 0 \\ O_{31}F' & O_{32}\frac{\sigma^2}{g} & O_{33}R' - I & 0 \\ O_{41}F' & O_{42}\frac{\sigma^2}{g} & O_{43}R' & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} O_{11} \\ O_{21} \\ O_{31} \\ O_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z' \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$[F'] = -i [F], [R'] = -i [R] \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$[Z'] = i \cdot k [Z] \quad \dots\dots\dots(15)$$

而 $[F]$ 、 $[R]$ 、 $[Z]$ 等請參考文獻，解上式即可得邊界線上的速度勢，並可從下式計算水面波形。

$$\zeta = -i \Phi_2 \zeta_0 e^{\sigma t} \quad \dots\dots\dots(16)$$

(2) 有限振幅波

將上述所得的微小振幅波解 (複數值) 乘以時間函數 $\exp(\sigma it)$ 後，對任意的時刻取其實數部作為初期值，並將(1)及(2)式代入(1)式，即可得該時刻時各邊界線上非線形速度勢值的連立一次方程式如下。

$$\begin{bmatrix} -O_{11}/e-I & O_{12} \left[\left(\frac{1-c}{b} \right)_j + \left(\frac{c}{b} \right)_{j+1} \right] & -O_{13}/e & 0 \\ -O_{21}/e & O_{22} \left[\left(\frac{1-c}{b} \right)_j + \left(\frac{c}{b} \right)_{j+1} \right] - I & -O_{23}/e & 0 \\ -O_{31}/e & O_{32} \left[\left(\frac{1-c}{b} \right)_j + \left(\frac{c}{b} \right)_{j+1} \right] & -O_{33}/e - I & 0 \\ -O_{41}/e & O_{42} \left[\left(\frac{1-c}{b} \right)_j + \left(\frac{c}{b} \right)_{j+1} \right] & -O_{43}/e & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \\ O_{41} & O_{42} & O_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_I/e \\ a/b \\ -d_{II}/e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

解上式可得

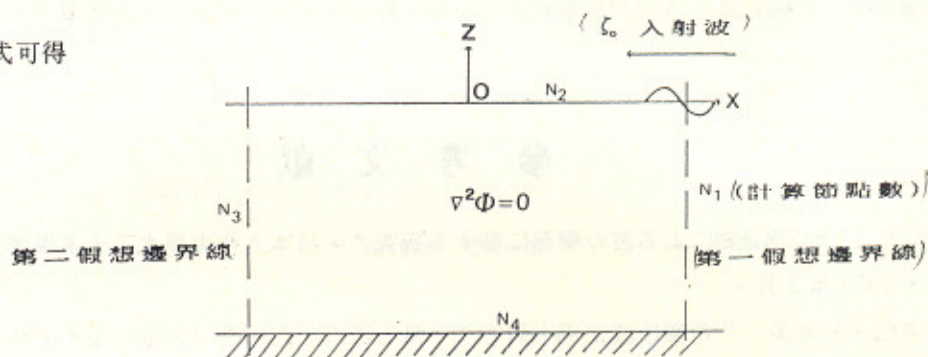


圖 4 進行波定義圖

解上式可得邊界線上各節點的非線形速度勢值，從而得到各節點的速度勢在其法線方向的導函數值，並可以(9)式求得其自由水面波形。因此只要對一個週期作同樣的計算，即可了解自由水面波形的變化情況。

(3) 計算例

本文以無因次週期 $\sigma^2 h/g = 1.0$ 入射振幅 $\zeta_0/h = 0.1, 0.15$ 及 $\sigma^2 h/g = 2.0, \zeta_0/h = 0.05, 0.1$ 為例，但是 h 為單位水深以 1m ， g 以 $9.8\text{m}^2/\text{s}$ 表示。同時為了說明本數值計算方法在將來實際應用上的可行性，所以取 6 個波長加以計算，而每個波長只取 16 個元素。圖 5 ~ 8 為水面波形的計算結果，圖中實線表示數值計算值而虛線為依據 Stokes 的第 3 階近似解。比較兩曲線可發現兩者非常吻合。

五、非線性重覆波

重覆波的數值計算方法與進行波大致相同，只須把第二假想邊界線的輻射條件改變為法線方向的流速（即速度勢在法線方向的導函數）為零的條件即可。

本文以無因次週期 $\sigma^2 h / g = 0.5$ 、入射振幅 $\zeta_0 / h = 0.05$ 、 0.1 及 $\sigma^2 h / g = 2.0$ ， $\zeta_0 / h = 0.025$ 、 0.05 為例，圖 9～圖 12 為垂直岸壁的水面波形時間變化歷時，圖中實線為本數值計算值而虛線為合田⁽⁷⁾ 的第 3 階近似解。由圖可知本數值計算結果與理論值一致。圖 13～圖 16 為岸壁傾斜 45 度的水面波形的時間變化歷時。

六、結 論

本文首先說明如何改善數值計算的方法，並舉進行波與重覆波為例，同時與理論解相比較、發現兩者大致吻合，而證明本數值計算法適用於非線形波解析的可行性。本計算法除可適用於結構物存在引起波變形的定常解析外，亦可用於解析波的分裂、碎波等非定常現象。這些結果將於爾後陸續發表。

參 考 文 獻

- (1) 周宗仁：“海岸構造物による波の變形に関する研究”，日本九州大學水工土木學博士學位申請論文，1977 年 3 月。
- (2) 周宗仁、馮德榮：“非線性波之溯上研究”，第二屆水利工程研討會論文集，1984 年，6 月。
- (3) 周宗仁、左羅航：“斜坡面上碎波波型之數值計算”，第八屆海洋工程研討會論文集，1985 年，10 月。
- (4) 岳景雲、王嘉興、施益章、周宗仁：“固定水平板對垂直壁減壓效果的實驗研究”，第九屆海洋工程研討會論文集，1987 年 11 月。
- (5) 周宗仁：“周宗仁邊界元素法在波浪力學之應用”，國立臺灣海洋學院河海工程學會，1983 年元月。
- (6) 周宗仁、翁文凱、井島武士：“潛水繫留水平板引起波之變化及水中繫留水平板之運動特性”，第九屆海洋工程研討會論文集，1987 年 11 月。
- (7) 合田良實、柿崎秀作：“有限振幅重覆波ならびにその波壓に関する研究”，日本港灣研究所研究報告，第 5 卷 10 號，1966 年 6 月。

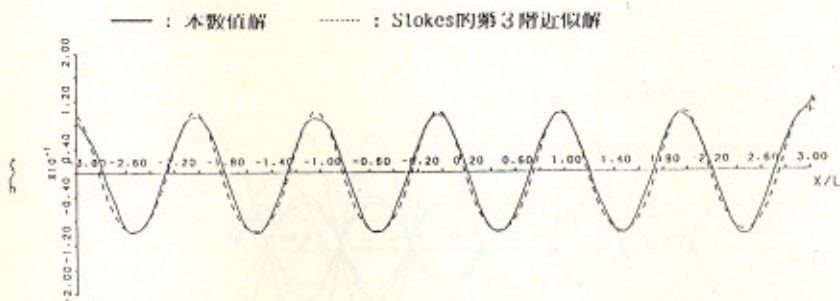


圖 5 $\sigma^2 h / g = 1.0$, $\zeta_0 / h = 0.10$, $k_a = 0.12$ 時，
非線形進行波的水面波形

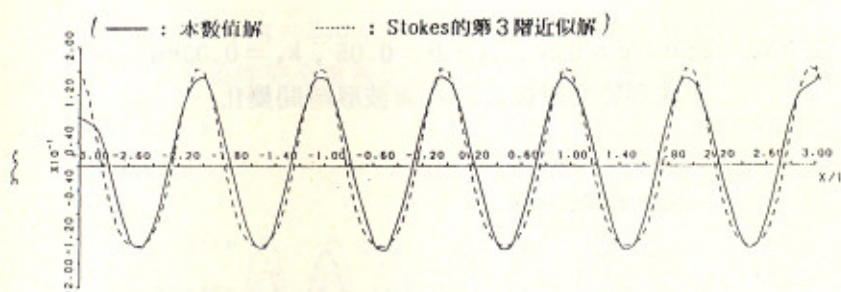


圖 6 $\sigma^2 h / g = 1.0$, $\zeta_0 / h = 0.15$, $k_a = 0.18$ 時，
非線形進行波的水面波形

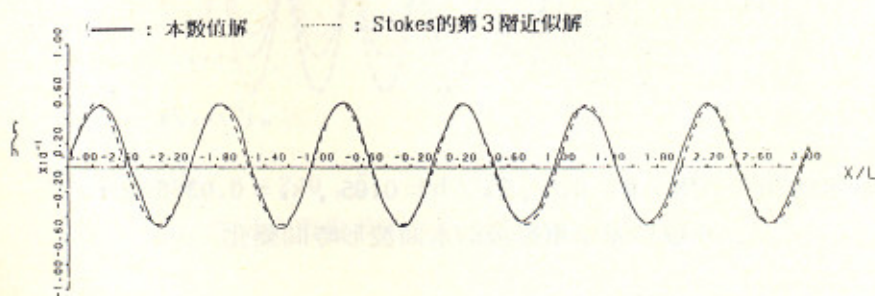


圖 7 $\sigma^2 h / g = 2.0$, $\zeta_0 / h = 0.05$, $k_a = 1033$ 時，
非線形進行波的水面波形

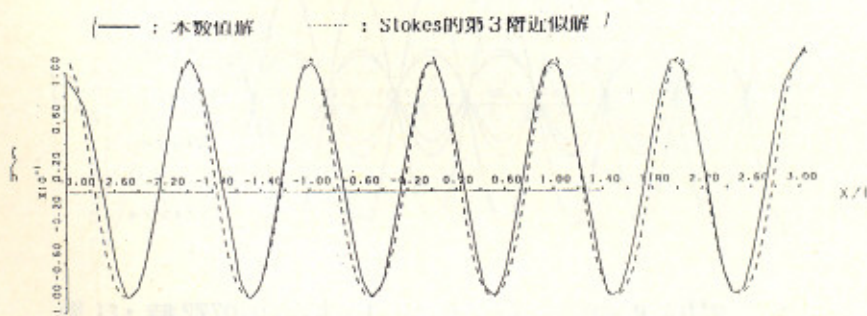


圖 8 $\sigma^2 h / g = 2.0$, $\zeta_0 / h = 0.1$, $k_a = 0.2066$ 時，
非線形進行波的水面波形

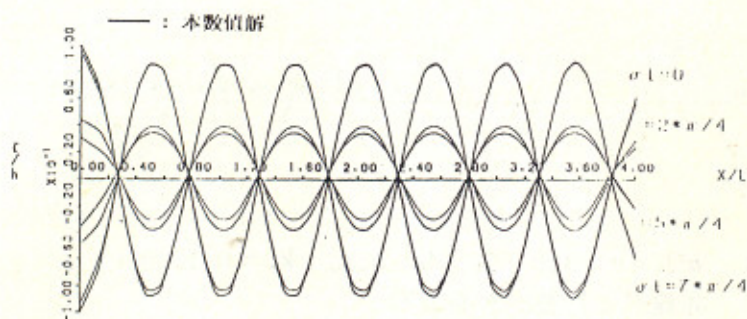


圖 9(a) $\sigma^2 h / g = 0.5$, $\zeta_0 / h = 0.05$, $k_a = 0.0386$ 時 ,
非線形完全重複波的水面波形時間變化

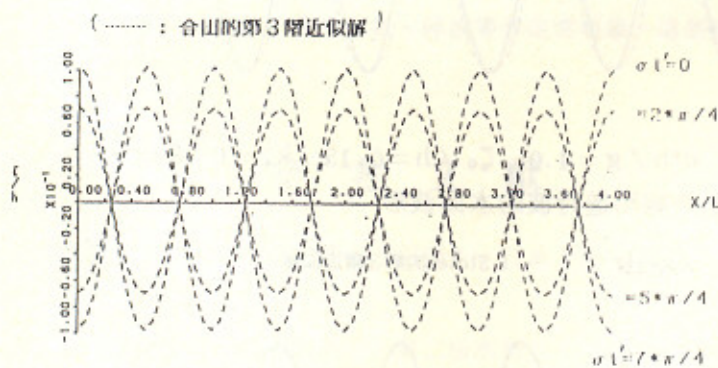


圖 9(b) $\sigma^2 h / g = 0.5$, $\zeta_0 / h = 0.05$, $k_a = 0.0386$ 時 ,
非線形完全重複波的水面波形時間變化

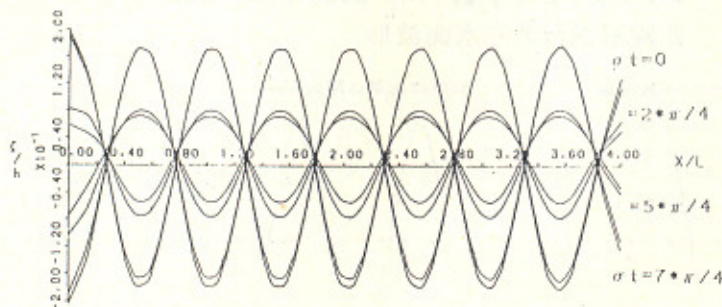


圖 10 $\sigma^2 h / g = 0.5$, $\zeta_0 / h = 0.1$, $k_a = 0.0772$ 時 ,
非線性完全重複波的水面波形時間變化

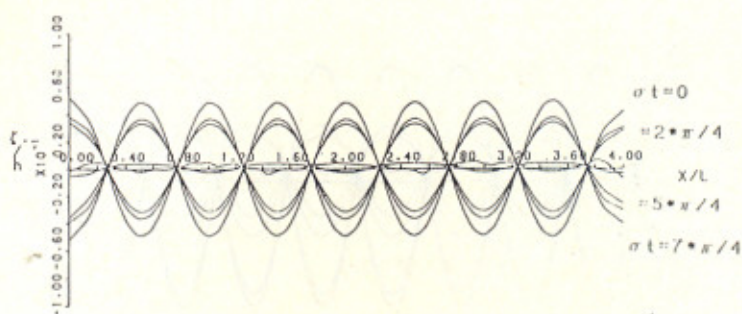


圖 11 $\sigma^2 h / g = 2.0$, $\zeta_0 / h = 0.025$, $k_a = 0.0516$ 時 ,
非線性完全重複波的水面波形時間變化

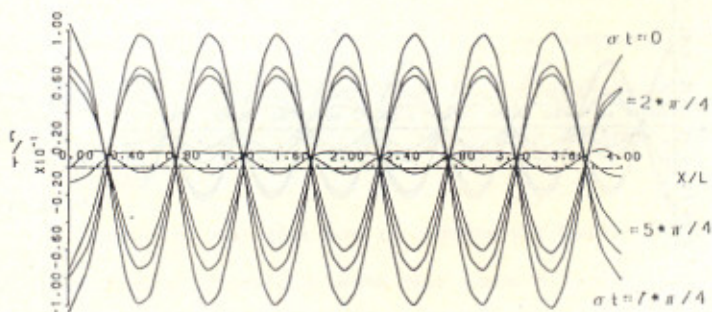


圖 12 $\sigma^2 h / g = 2.0$, $\zeta_0 / h = 0.05$, $k_a = 0.1033$ 時 ,
非線性完全重複波的水面波形時間變化

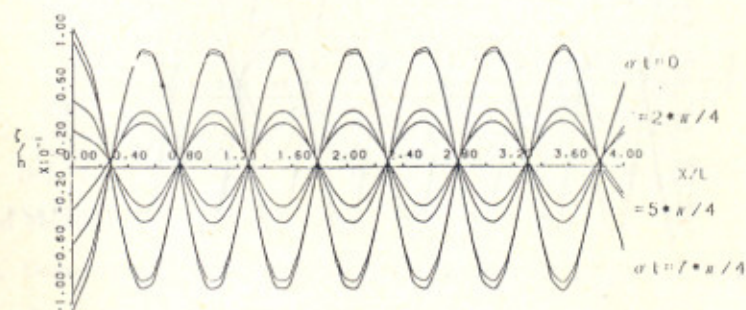


圖 13 $\sigma^2 h / g = 0.5$, $\zeta_0 / h = 0.05$, $k_a = 0.0386$ 時 ,
45 度傾斜岸壁的非線形水面波形時間變化

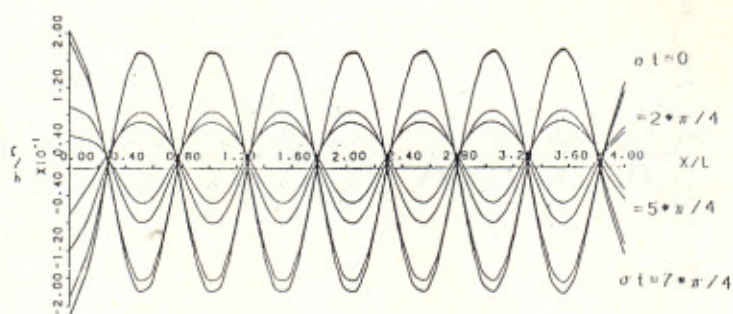


圖 14 $\sigma^2 h / g = 0.5$, $\zeta_0 / h = 0.1$, $k_a = 0.0772$ 時 ,
45 度傾斜岸壁的非線形水面波形時間變化

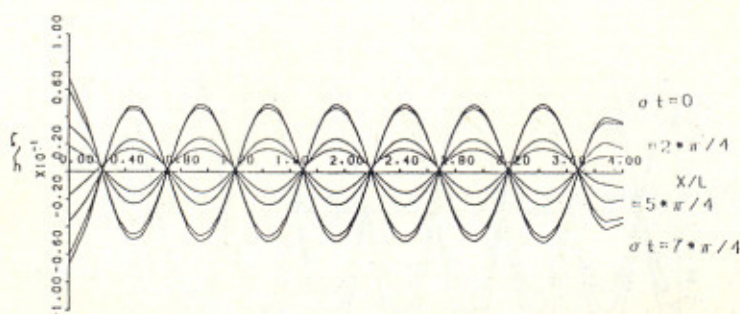


圖 15 $\sigma^2 h / g = 2.0$, $\zeta_0 / h = 0.025$, $k_a = 0.0516$ 時 ,
45 度傾斜岸壁的非線形水面波形時間變化

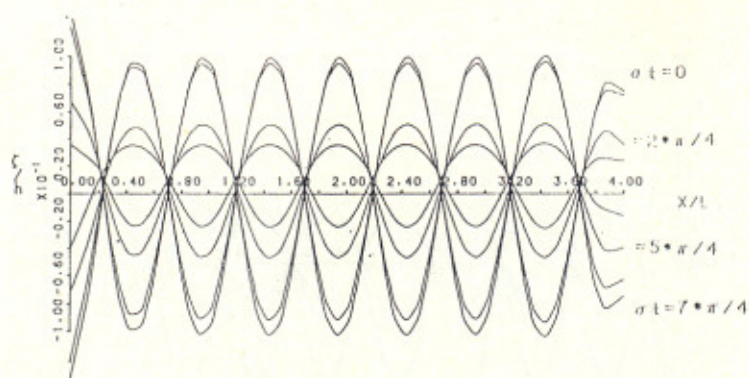


圖 16 $\sigma^2 h / g = 2.0$, $\zeta_0 / h = 0.05$, $k_a = 0.1033$ 時 ,
45 度傾斜岸壁的非線形水面波形時間變化

Numerical Solution for Nonlinear Wave

by

C. R. Chou* C. Y. Yueh** W. K. Weng***

ABSTRACT

Author analyzed deformation of wave that induced by coastal structures and the wave forces that act on the structure by means of boundary elements method under small amplitude wave theory. For advance research, wave that deform on a slope was studied under the consideration of nonlinear boundary conditions on free water surface. Results were obtained only for some special incident wave conditions, but we found the results of this method were be diverged very easily.

We found that there were two reasons that cause the numerical solutions to diverged, one was at the node point on the edge of boundary where was a geometrical singular point, and the other reason was on these singular points where existed two different boundary conditions at the same time.

This paper will explain the way that how to improve the numerical calculation. For examples, the nonlinear progressive wave or standing wave that cause by quaywall will be shown. It will be compared to exact solution to prove this numerical method is correct.

* Professor, Department of Harbor and River Engineering National Taiwan College of Marine Science and Technology.

** Instructor, Department of Harbor and River Engineering National Taiwan College of Marine Science and Technology.

*** Teaching Assistant, Department of Harbor and River Engineering National Taiwan College of Marine Science and Technology.