第八屆海洋工程研討會　民國七十四年十月

# 任意物體附近分離流之數值模擬研究

周宗仁*　　　　盧天麟**

## 摘　　要

本文以表面旋渦法為計算方法，模擬二度空間任意形狀物體附近之分離流況，但忽略粘滯性的擴散過程。本法經過勢流、旋渦發生、旋渦移動以及旋渦對流等一連串的數值運算後，將可模擬物體附近之流動情形，然後藉此預測流動之現象與動力之特性。

首先對受定常流影響之任意物體分別計算與分析，所得之抗力係數值（$C_D$）與其他學者之實驗比較，結果甚為良好。其次將本法擴展運用至受振動流影響之物體附近流況的計算，藉以模擬物體受振動流影響引起之後渦流生成與渦流的逆向沖刷。

進行數值計算時，為了節省計算的時間與空間，特別以對稱流處理，並且以方形柱體、平板、圓柱為例，說明本法可以適用於任意形狀物體。

## 一、前　　言

本文發展一個二度空間旋渦移動之非粘性模式，此模式是藉一連續的渦流線（Vortex filament）所組成之渦流片（Vortex Sheet）來模擬任意物體附近的分離流。

關於旋渦移動之過程，過去的學者已經做過很多的研究[(1)(2)(3)(4)]，而且是以一個分離旋渦法（Discrete Vortex Method）為之。在這些計算中，大部份與典型邊界之物體有關，如圓柱、平板、楔形物體等，對此特殊的個別問題而言，古典的模擬方法是可應用的，例如保角變換法（Conformal Transformation Method）和鏡像原理（Mirror Image Theorem）。

Lewis（1981）[(5)] 利用表面旋渦法（Surface Vorticity Method）計算二度空間陡峭物體（Bluff body）的分離流，其獨特的貢獻是任意形狀均予考慮，因此在實際應用上，給予一個更良好的處理方法。除此之外，表面旋渦法更可以簡單而直接的描述不可壓縮流體流動。

但在此值得注意的是，上述的所有計算均係對定常流（Steady flow）而言，關於速度隨時間改變的流動少有注意，因此本文除了計算物體受定常流影響之流況外，並對受不定常流（Unsteady flow）影響之流況加以考慮。

---

* 國立臺灣海洋學院河海工程學系教授

** 國立臺灣海洋學院河海工程研究所畢業

## 二、理論解析及數值方法

爲了二度空間任意形狀物體附近分離流之計算，我們利用表面漩渦法來模擬物體附近的流動情形。本文在數值運算過程中，在每一個時間間隔裡，包括下列幾個步驟：

(1)勢流計算

對於任意形狀物體之勢流計算，我們將考慮所有外界的影響，這包含了等速流（Uniform Stream）以及在後渦流（Wake）中的移動漩渦，更進一步，等速流可在每一個時間間隔改變其大小與方向，而不使理論複雜。

假如我們考慮一個二度空間任意物體表面之非粘性流體流動，如圖1所示，在abcd 的範圍內，由於從流動中速度 $V_s$ 至物體上速度爲零之速度不連續，導致一個渦流片 $\gamma(S)$ 的存在，藉著考慮abcd範圍內的環流（Circulation），我們很容易證實下式成立。

$$\gamma(S)=V_s \tag{1}$$

因此，我們將假設物體表面係由一連續的渦流片所組成，以近似模擬鄰近物體表面的實際流動情形。目前的問題即在於計算 $\gamma(S)$ 的分布，Martensen （1959）[6] 已經證實，在等速流（$W\infty$，$\alpha_\infty$）中一個物體表面某一點m上，如圖2所示，Dirichlet邊界條件的應用，導致一個無特異性的Fredholm 積分方程式，如下式所示。

$$\oint\gamma(S_m)K(m,n)\,ds_n-\frac{1}{2}\gamma(S_m)=-W\infty\left(\frac{dx_m}{ds}\cos\alpha_\infty+\frac{dy_m}{ds}\sin\alpha_\infty\right) \tag{2}$$

其中，$\alpha_\infty$ 爲等速流 $W\infty$ 與x軸之夾角。上述方程式簡單的說明了一個事實，亦即在m點上且平行於物體表面的速度爲零。K（m，n）是一個相關係數，其值爲由在n點上之單位漩渦所產生在m點上平行於物體表面的速度，可表成下式。

$$K(m,n)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{-(x_m-x_n)\left(\frac{dy_m}{ds}\right)+(y_m-y_n)\left(\frac{dx_m}{ds}\right)}{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2}\right\} \tag{3}$$

因此，式(2)等式左邊之環積分表示由物體表面上所有邊界漩渦 $\gamma(S_n)$ 所產生在m點上平行於物體表面的速度。左邊第二項 $\frac{1}{2}\gamma(S_m)$ 爲在m點上，因渦流片存在之內外速度差，而等式右邊則計算了由等速流 $W\infty$ 在m點上平行於物體表面的速度分量。

對於流場中散佈著Z個移動漩渦 $\Gamma_N$ 時，我們將在式(2)中加上移動漩渦的影響，由下式表示之。

$$\oint\gamma(S_m)K(m,n)\,ds_n-\frac{1}{2}\gamma(S_m)=-W\infty\left(\frac{dx_m}{ds}\cos\alpha_\infty+\frac{dy_m}{ds}\sin\alpha_\infty\right)-\sum_{N=1}^{Z}\Gamma_N L(m,N) \tag{4}$$

其中，我們取漩渦 $\Gamma_N$ 順時針爲正。L（m，N）也是一個相關係數，其與K（m，n）有相同的型式。

在解式(4)時，如果不經數值計算，則無法求得其解。若將式(4)沿物體表面邊界線分割成M個分離元素 $\Delta S_n$，在各元素令其 $\gamma(S_n)$ 值爲一定，並以各元素之中央節點之值做爲代表值，如圖3所示，則可將式(4)分離成下列之方程式。

$$\sum_{n=1}^{M}\gamma(S_n)K(m,n)\Delta S_n-\frac{1}{2}\gamma(S_m)=-W_\infty\left(\frac{dx_m}{ds}\cos\alpha_\infty+\frac{dy_m}{ds}\sin\alpha_\infty\right)-\sum_{N=1}^{Z}\Gamma_N L(m,N) \tag{5}$$

上式之m係對全部邊界成立，故可得M個方程式，若將等速流（$W_\infty$，$\alpha_\infty$），移動渦渦分布$\Gamma_1$、$\Gamma_2$ ……$\Gamma_N$ 以及分割元素等各項條件代入，解此M個線性方程式，便可求得所有點上之$\gamma$(S)之解。又由式(1)知$V_s = \gamma$(S)，則物體表面之速度分布亦可求得。

(2)漩渦移動

在每一個時間間隔中，均有新的漩渦元素經由分離點移動進入流場。在未說明漩渦移動的過程之前，我們將先討論在物體表面上漩渦的發生。假如我們定義$d\gamma$ 表dt 時間中在S點上生成之單位長度的淨漩渦量，則漩渦進入或離開控制體積abcd（圖1）將有下列之關係存在。

$$d\gamma\, ds = \left\{\frac{1}{2}(V_s+dV_s)(\gamma(S)+d\gamma(S))-\frac{1}{2}V_s\gamma(S)\right\}dt \tag{6}$$

由式(1)加上柏努力方程式之應用，化簡之後，導致一個在任意處S上之漩渦生成方程式，如下式所示。

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d}{ds}\left(\frac{V_s^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} \tag{7}$$

因此我們知道，假如壓力下降（$\frac{dp}{ds}<0$），表面漩渦自然的發生，相反的，壓力上升（$\frac{dp}{ds}>0$），表面漩渦自然的破壞。

此刻我們再考慮一個具有銳緣的陡峭物體分離的情形，如圖4所示。由勢流計算，我們已得到銳緣前的漩渦元素是$\gamma$(sp)，而其對流速度是$\frac{V_{sp}}{2}$。因此在每個時間間隔$\Delta t_n$中，新的漩渦元素移動進入流場中，成爲移動漩渦。其強度是

$$\Delta\Gamma_n=\gamma(sp)\cdot\frac{V_{sp}}{2}\cdot\Delta t_n=\frac{1}{2}V_{sp}^2\,\Delta t_n \tag{8}$$

而且此漩渦一經移動，在所有時間中保持其強度。另外新漩渦元素將隨分離點處物體表面切線方向移動，其長度是

$$\Delta S_n=\frac{1}{2}V_{sp}\,\Delta t_n \tag{9}$$

而其中心位置如下式所示。

$$\begin{aligned} x &= x_{sp}+\frac{\Delta S_n}{2}\cos\beta \\ y &= y_{sp}+\frac{\Delta S_n}{2}\sin\beta \end{aligned} \tag{10}$$

此處$\beta$是分離點處物體表面之切線與x軸之夾角，如圖4所示。

(3)漩渦對流

由於一個在n點上單位漩渦所產生在m點上之水平速度分量u與垂直速度分量v，如圖5所示，可以下式表示之。

$$u = U(m,n) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{(y_m - y_n)}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}\right\}$$

$$v = V(m,n) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{-(x_m - x_n)}{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}\right\} \tag{11}$$

因此，由圖 2 所示，後渦流中之移動漩渦 $\Gamma_N$ 之對流速度分量，將由除自身外，流場中所有的影響計算而得到，如下式所示。

$$u_{CN} = \sum_{n=1}^{M} \gamma(S_n)\Delta S_n U(N,n) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{Z} \Delta P_n U(N,n) + U_\infty$$

$$v_{CN} = \sum_{n=1}^{M} \gamma(S_n)\Delta S_n V(N,n) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^{Z} \Delta P_n V(N,n) + V_\infty \tag{12}$$

並且在每個時間間隔中，漩渦之位置改變，其新的位置將由下式計算而得到。

$$x_{new} = x_{old} + u_{CN}\,\Delta t_n$$

$$y_{new} = y_{old} + v_{CN}\,\Delta t_n \tag{13}$$

式(12)與式(13)將可計算任何一個時間間隔裡，流場中任何點所組成的煙線（Streak line）。

除此之外，漩渦之擴散也將發生，但在本文中，我們忽略了粘滯性（Viscosity）的擴散過程。圖 6 說明一個簡單的數值運算過程，依此，在一個時間間隔內，可獲得一個半穩定（Quasi－Steady）的解，因此對與時間相關的流動（Time-dependent flow）而言，其解將很容易的得到。

由上述之方法得知，漩渦元素將形成一連續的渦流片，而且此渦流片分開了外部流（Outer flow）與後渦流；後渦流中的渦流片也將逐漸的捲起，形成一連續的壓力梯度進入漩渦的核心。對於流動之計算目的而言，我們將只注意物體表面上之壓力分布。如圖 4 所示，恰在分離點之後的表面壓力 $P_{O2}$ 與分離點之前的表面壓力 $P_{O1}$，因越過分離點爲渦流片隔開，所以有下列之關係存在。

$$P_{O2} = P_{O1} - \rho\frac{V_{sp}^2}{2} \tag{14}$$

因此在物體表面上之壓力分布可以由無因次化之壓力係數（$C_D^*$）簡單的表示之。則

$$C_D = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho W_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_s}{W_\infty}\right)^2 \qquad \text{（分離點之上流區）}$$

$$C_D = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho W_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V_s}{W_\infty}\right)^2 - \left(\frac{V_{sp}}{W_\infty}\right) \qquad \text{（分離點之下流區）} \tag{15}$$

最後，形狀阻抗（Form drag）係數與升力（Lift focre）係數將由沿物體表面之壓力積分而得到，如下式所示。

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho W_\infty^2 A}\oint p\cos\theta\, dS$$

$$C_L = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho W_\infty^2 A}\oint p\ \sin\theta\, dS \tag{16}$$

其中A表特性面積，又$C_L$ 因本文中對稱流之考慮，故其值爲零。

## 三、數值計算例及結果

(1)柱體受等速流影響引起之分離法

本文以方形柱體、三角形柱體、平板以及圓柱爲計算例，以證實表面漩渦法之應用，其計算點之取法如圖7所示。數值計算時，爲了得到較良好的結果以及節省可用的計算時間，在微小時間間隔上，做了一些選擇。本文以無因次化之時間間隔 $\Delta t' = U\Delta t/R$ 爲參數，在改變 $\Delta t'$ 的情形下對各問題加以計算，結果將在下面加以說明。

a 方形柱體

圖8表示等速流經過方形柱體之分離情形，由圖中顯示，渦流片在初期保持連續而且平滑，並且在較遠的下流處，渦流片開始捲起，此乃我們所希望得到的眞實渦流片的情形。當計算繼續進行時，漩渦充滿整個下流區域，形成一個穩定的後渦流情形。圖9表示其表面壓力分布情形，其中S爲離前端之停滯點表面長度的距離。圖10表示$C_D$ 隨時間變化之情形，計算開始時快速的由零增加到2.3左右，然後緩慢下降至1.5的穩定值。

b 三角形柱體

圖11表示等速流經過三角形柱體之分離情形，對此問題而言，其與方形柱體有相似的情況。圖12表示$C_D$ 之連續變化情形，最大到達2.0，穩定時趨於1.1，小於方形柱體之$C_D$ 。

c 平板

圖13表示等速流經過平板之分離情形。圖14表示$C_D$ 之連續變化情形，並且特別與Sarpkaya（1966）[7] 之實驗比較，以了解其趨勢。其值最大到達2.5左右，然後隨時間之增加而下降到穩定階段。

d 圓柱

對於平滑表面的陡峭物體，由於分離點之位置實際上是不固定的，因此在數值上產生了一些特殊的問題，尤其是分離點的位置和移動漩渦離開分離點的角度。此處我們係假定分離點位置在圓柱的縱軸直徑上，而移動漩渦離開的角度是$45^\circ$，來加以計算。

圖15表示等速流經過圓柱較完全的分離流況預測。圖16表示表面壓力分布情形，因爲漩渦之生成，柱後壓力不再上升而產生形狀阻抗。圖17表示$C_D$ 之連續變化情形，最大到達1.6，然後緩慢下降趨於1.2左右的穩定值。

(2)柱體受振動流影響引起之分離流

過去的學者，對於陡峭物體受振動流影響之問題，已經做過許多研究，相當的結果也可由實驗中得知。本文則利用數值方法模擬振動流經過柱體所產生之後渦流及其影響。

振動流與均一方向流（Unidirectional flow）和波浪流（Wavy flow）基本上有某些不同。當柱體受振動流支配時，流動不僅由零速度加速到最大，然後再減速到零速度，而且其方向也將在每一個週期中變化。這速度方向的改變，使得在下流區域已形成之後渦流將逆向沖刷到上流區域的柱體側面。相對的，波浪流顯得更加複雜，除了自由表面（Free surface）及繞射（Diffraction）效應外，水粒子之垂直速度運動也將產生三度空間的問題。對最初的目的而言，我們不考慮這些效應，而將重點放在振動流上面。

進行數值計算時，本文係將前面的方法加以擴展，而假定等速流（$W_\infty$，$\alpha_\infty$）在每一個時間間隔中，其大小隨正弦函數而改變。如此，$W_\infty = U_m \sin\theta$，$\theta = \frac{2\pi t}{T}$。對圓柱而言，計算之條件及結果列表於表1，其中（K，C）$_m$ 及R.e.m 由下式計算得之。

$$(K, C)_m = \frac{U_m T}{D}$$

$$R.e.m. = \frac{U_m D}{\nu} \tag{17}$$

此處 $\nu$ 是水之動粘滯性係數（Kinemectic Coefficient of Viscosity），約等於 0.01141 $cm^2/sec$。

圖18與圖19為分別在不同情況下計算之結果，圖20則表示一個較完全的預測。計算開始時，流動由靜止開始加速，漩渦因逆向壓力梯度效應而生成，而且緊鄰於柱體附近，隨著時間之增加，一個對稱漩渦在柱體後方形成。在未達半週期時，對稱漩渦完全成長成形，此時流動受減速影響，故而漩渦已漸有向柱體移動的趨勢，當半週期後，水粒子速度方向改變，如此使得漩渦逆向沖刷，最後趨於紊亂，而整個流場之流動方向改變。值得注意的是，在半週期附近時，流速漸近於零，因此在柱體前方的流場速度非常小，我們由觀察得知，柱體後方的流場速度卻仍具有相當大的速度，這主要是受已形成漩渦的影響所致。

圖21表示圓柱在漩渦成形時之表面壓力分佈，由圖中得知，柱後之表面壓力隨而呈均勻一致情形，此亦漩渦存在之結果，其形狀阻抗係數被表1所示。

## 四、結論與討論

本文以表面漩渦法分別對等速流經過不同形狀之陡峭物體加以計算，除模擬其分離流況外，計算所得之抗力係數值（$C_D$）與其他學者之實驗比較，大約僅有10％至20％的差異。另外對柱體受振動流影響時，經表面漩渦法之擴展運用，亦可得到相當的結果。

然而本法在應用上也有許多的困難，主要是：

(1)在自身影響下的移動漩渦趨勢於一個紊亂分布，此與移動漩渦之數目及計算時間有關，乃是受數值誤差影響所致。

(2)非粘性流體不允許漩渦擴散或强度衰減，甚至破壞。

(3)在數值計算中尚無法模擬不對稱流情形。

(4)計算的時間與容量。

除此之外，對於分離點之計算（此係對平滑表面而言）、雷諾數之考慮以及三度空間問題，更需要不同的理論與方法的使用，對於這些問題則有待更進一步的研究。

## 五、參考文獻


1. Rosenhead, L., " The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity," Proceeding of the Royal Society of London, Ser. A, Vol. 134, May 1931, pp. 170-192.
2. Sarpkaya, T., " An Analytical Study of Separated Flow about Circular Cylinders," Journal of Basic Engineering, Trans, A.S.M.E., Vol. 90, Dec. 1968, pp. 511-520.
3. Clements, R.R., " An Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding," Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, 1973, pp.321-336.
4. Sarpkaya, T., " An Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding for Transient and Asymptotically Steady Separated Flow over an Inclined Plate, " Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, 1975, pp. 109-128.
5. Lewis, R.I., " Surface Vorticity Modelling of Separated Flows from Two -Dimensional Bluff Bodies of Arbitrary Shape," Journal of Mechanical Encineering Science, Vol. 23, No. 1, Feb. 1981, pp.1-12.
6. Martensen, E., " Die Berechnung der Druckvertilungen dicken Gitterprofilen mit Hilfe von Fredholmschen Integral Gleichungen," Zweiter Art. Arch. Ret. Mech. Anel., Vol. 3, 1959, pp.235-237.
7. Sarpkaya, T., " Separated Flow about Lifting Bodies and Impulsive Flow about Cylinders," AIAA Journal, Vol. 4, March 1966, pp. 414-420.
8. Sarpkaya, T., " Forces on Cylinders and Spheres in a Sinusoidally Oscillating Fluid," Journal of Applied Mechanics, Trans. A.S.M.E., Vol.42, March 1975, pp. 32-37.
9. 周宗仁、張家棣："圓柱受波動影響引起後渦流之研究"，河海研究第16號，台灣海洋學院河海工程學系。
10. Momchilo M. Zdravkovich and John E. Namok, " Formation and Reversal of Vortices Around Circular Cylinders Subjected to Water Waves," Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE, Vol. 103, NO. WW3, Aug. 1977, pp 378-383.
11. Bidde, D.D., " Laboratory Study of Lift Forces on Circular piles," Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE, Vol. 97, No. WW4 , Nov. 1971, pp. 595-614.
12. Goldstein S. " Modern Developments in Fluid Dynamics," Vol. I and Vol. II, Dover ( New York, 1965 ).

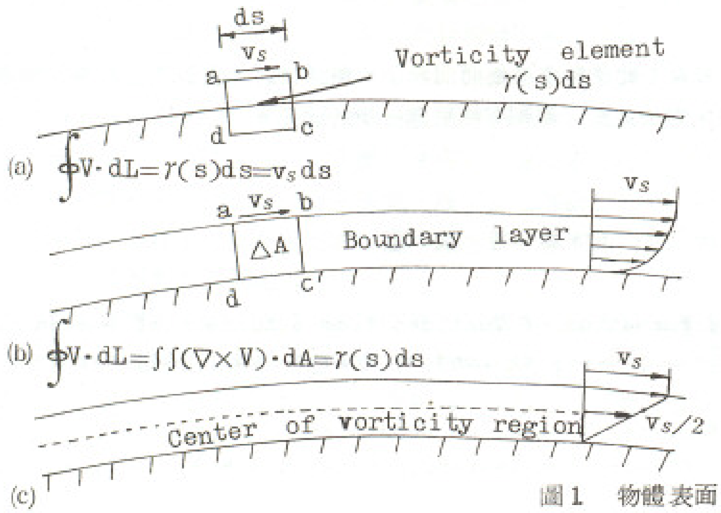



圖1　物體表面之表面旋渦模擬

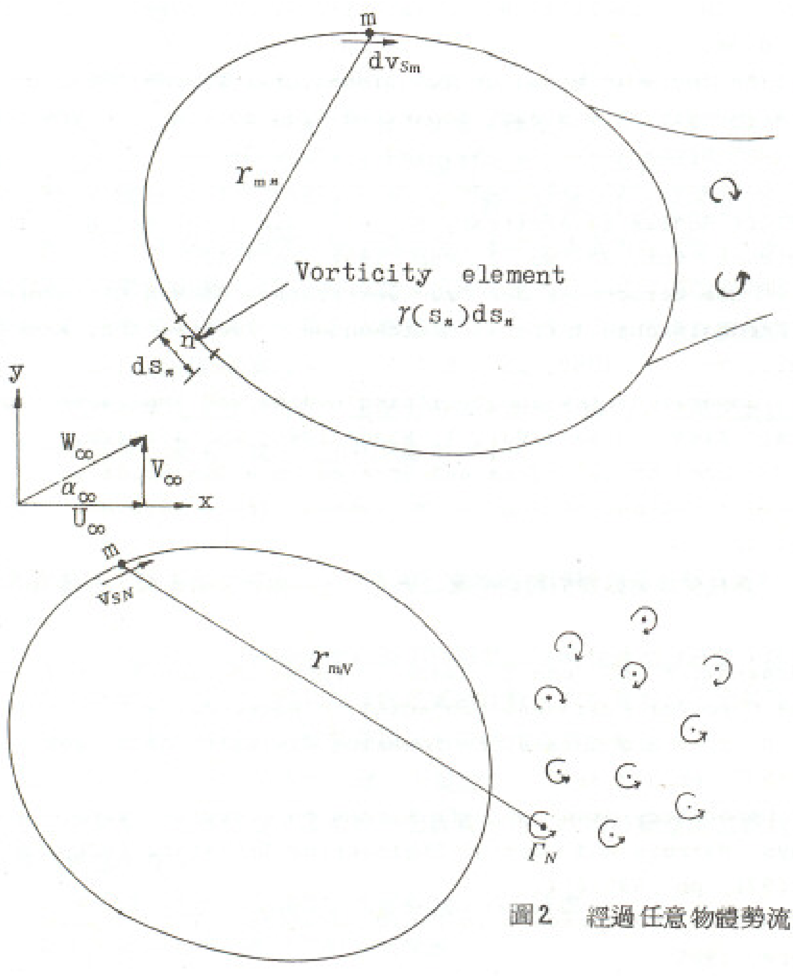



圖2　經過任意物體勢流之表面旋渦模擬

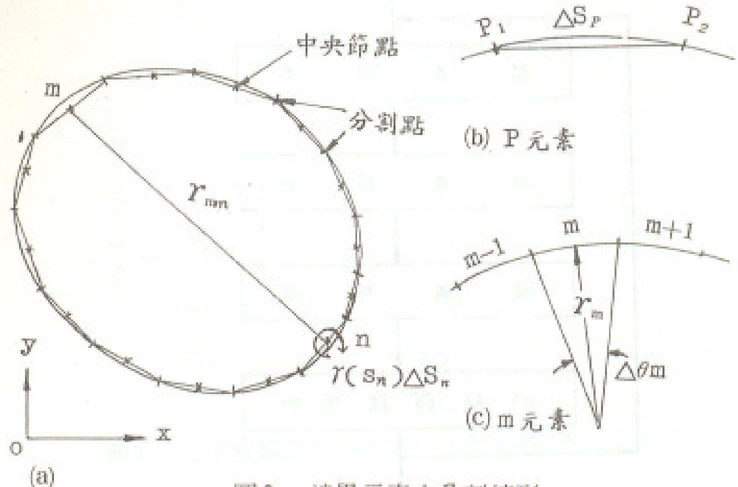



圖3. 邊界元素之分割情形

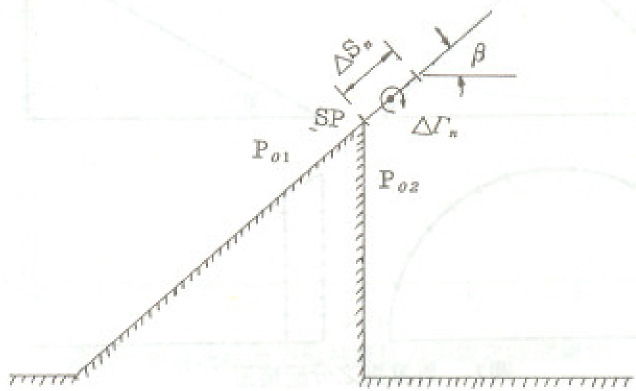



圖4. 漩渦在銳緣處之移動

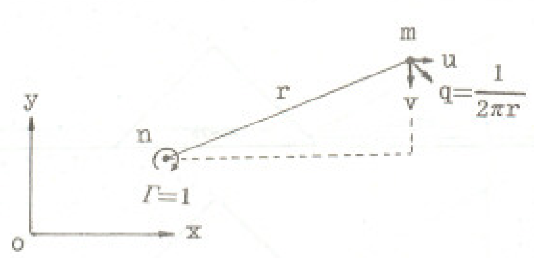



圖5. 漩渦之對流

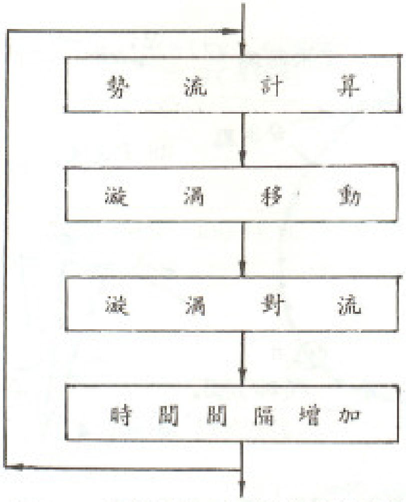



圖6. 表面漩渦法之數值運算過程

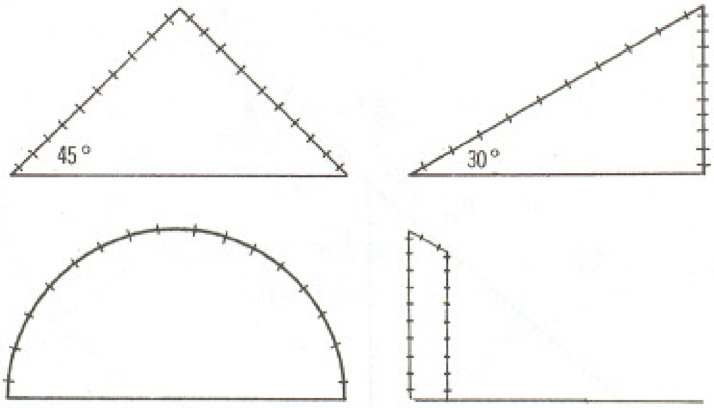



圖7. 計算點之分配情形

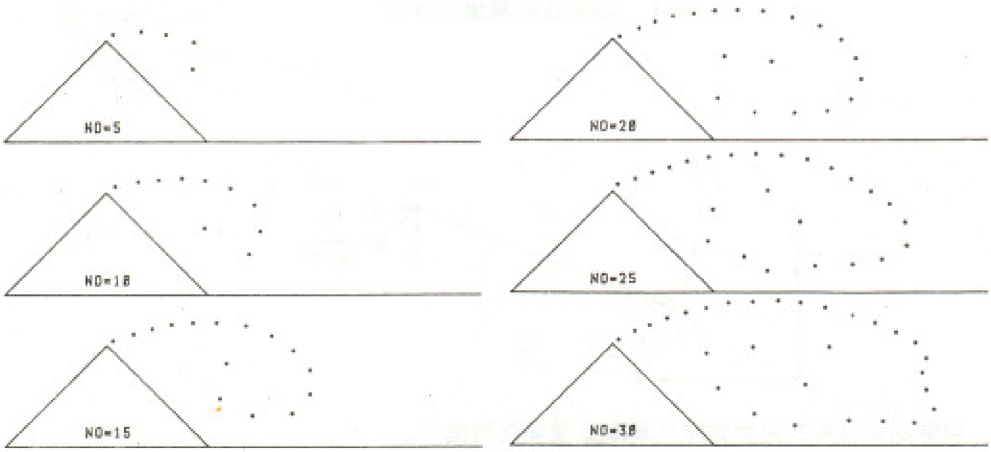



圖8. 等速流經過方形柱體之分離流況（ $U\Delta t/R = 0.2$ ）

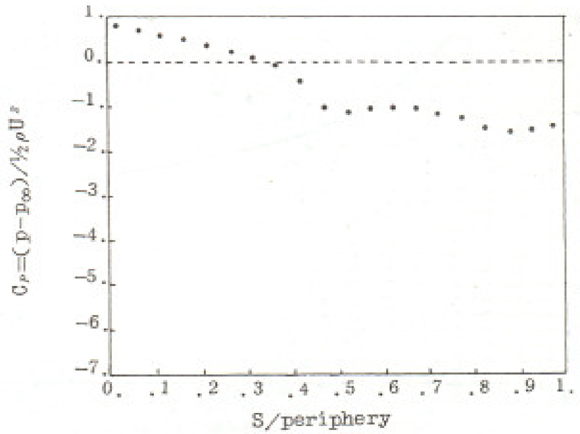



圖9. 方形柱體之表面壓力分佈（ UΔt／R＝0.2 ）

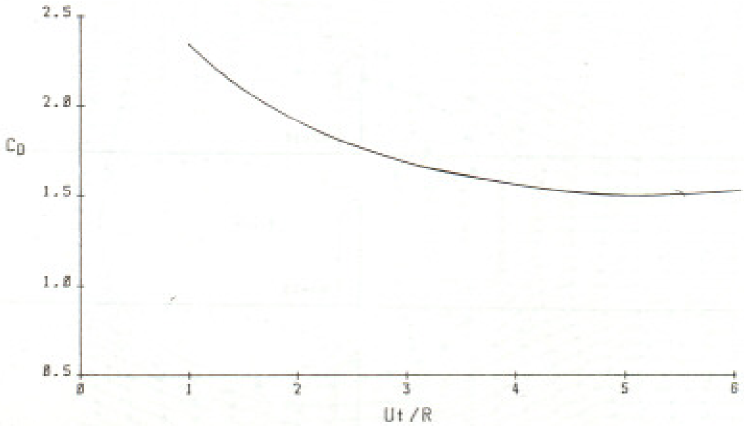



圖10. 等速流經過方形柱體抗力係數之時間變化

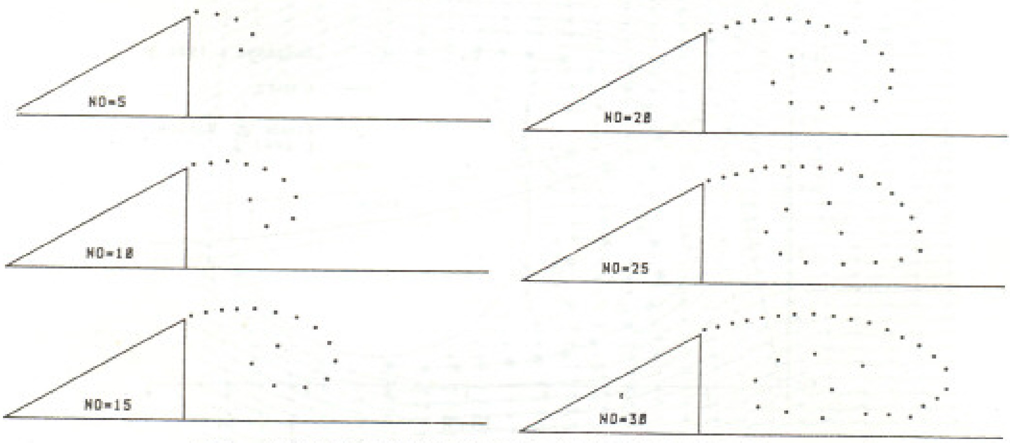



圖11. 等速流經過三角形柱體之分離流況（ UΔt／R＝0.15 ）

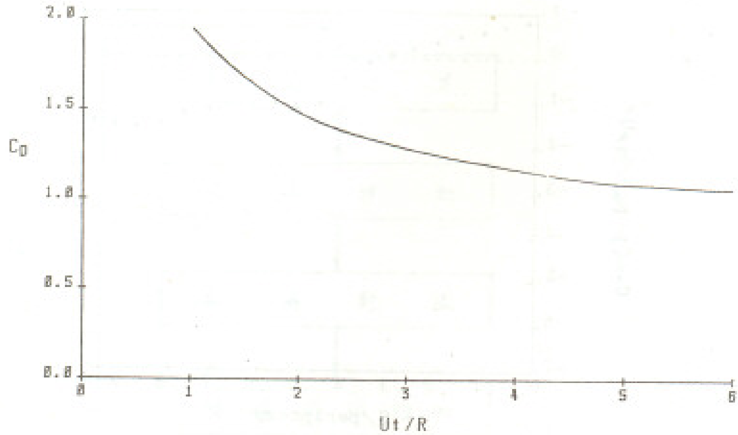



圖12.　等速流經過三角形柱體抗力係數之時間變化

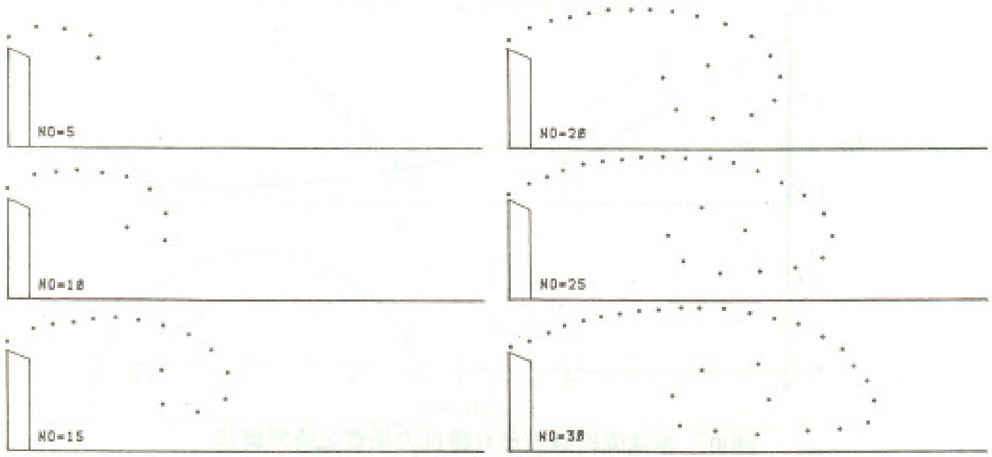



圖13.　等速流經過平板之分離流況（ $U\Delta t/R = 0.2$ ）

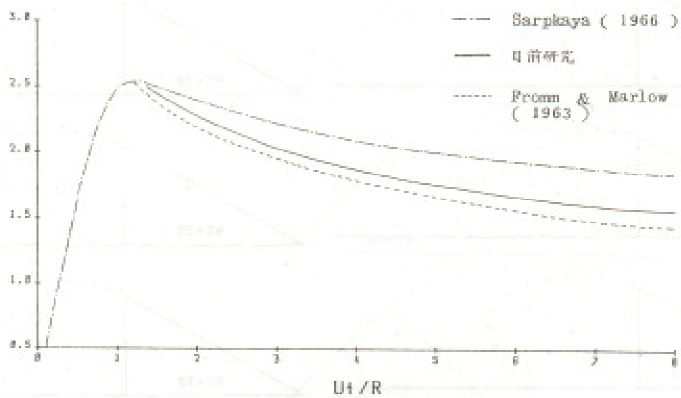
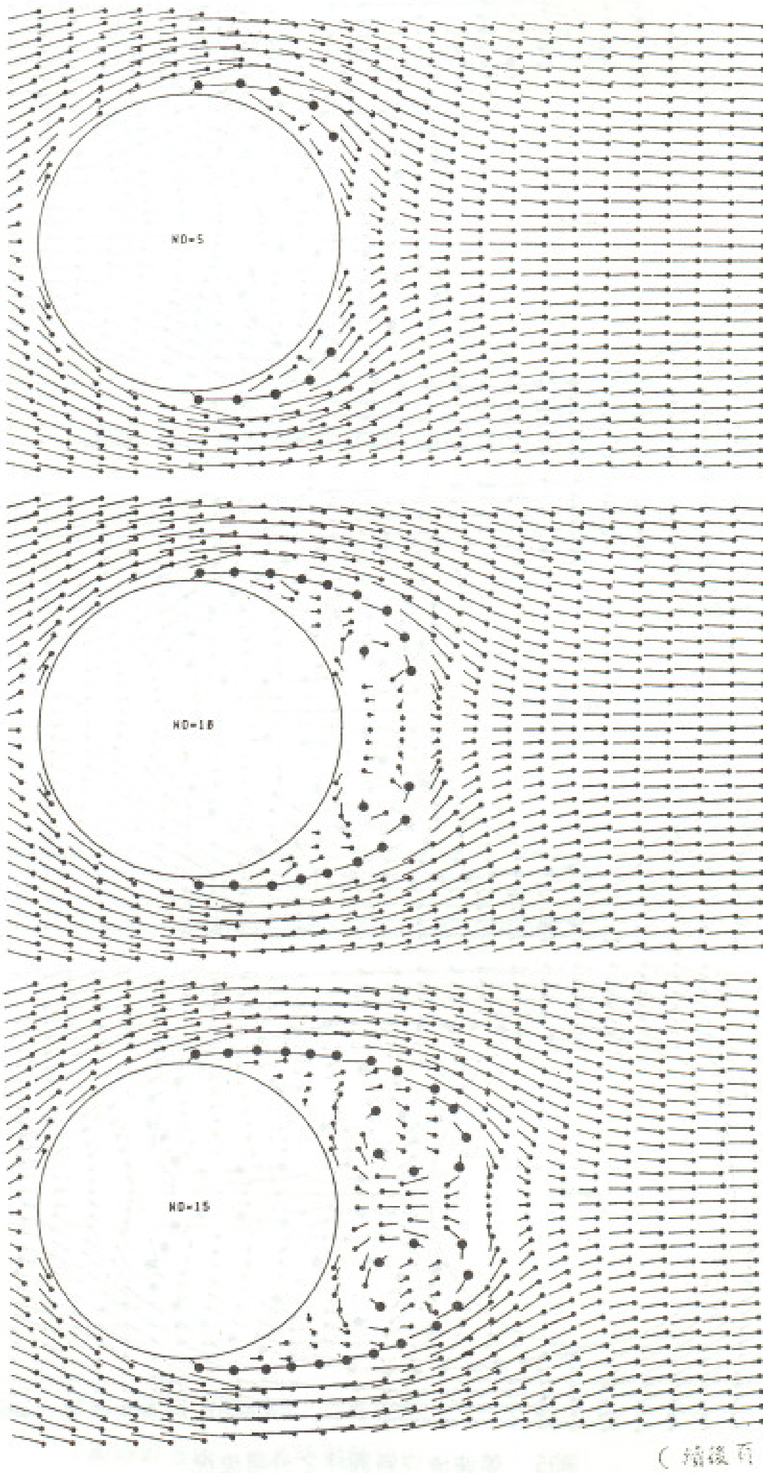



圖14.　等速流經過平板抗力係數之時間變化




（續後頁）

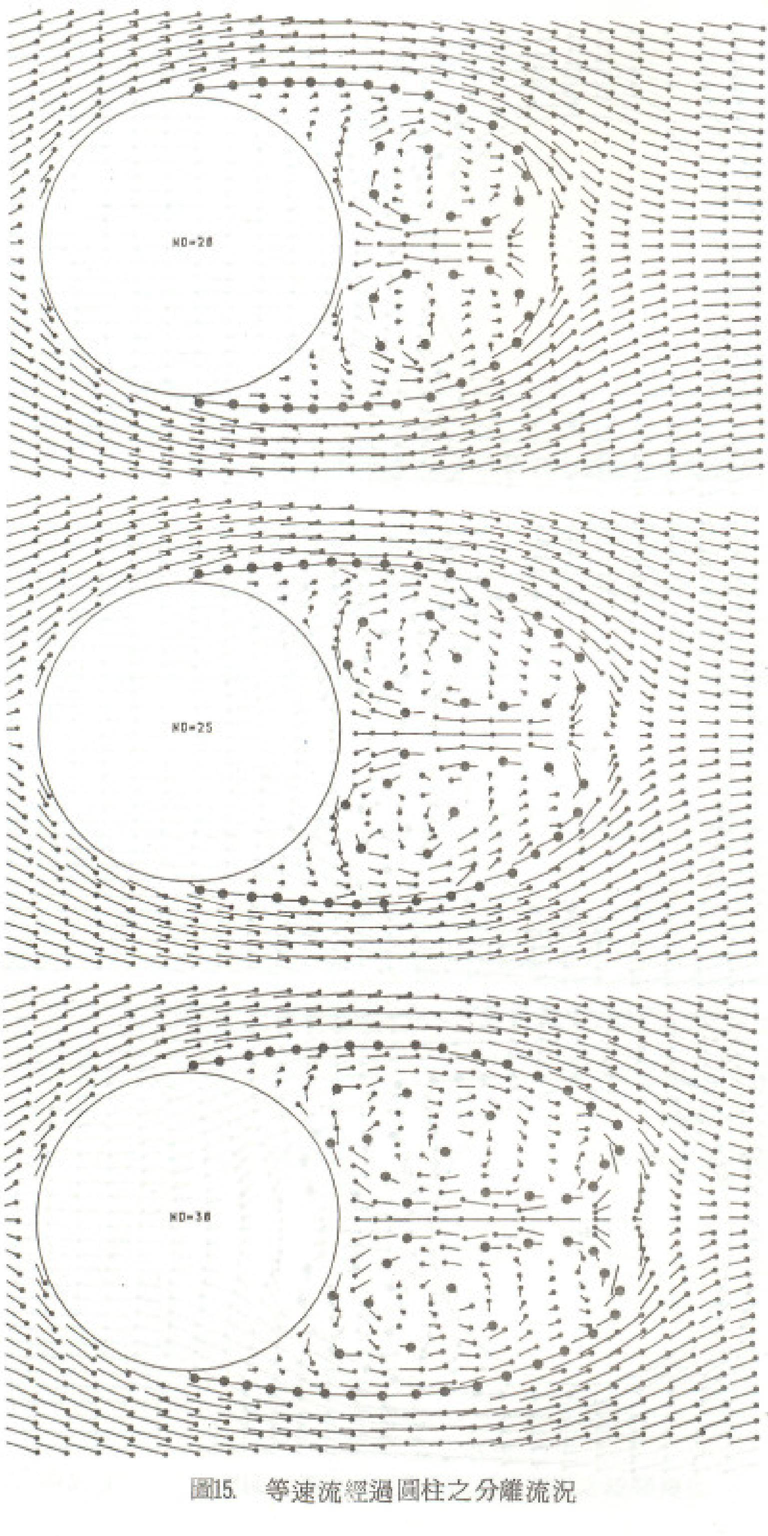



圖15. 等速流經過圓柱之分離流況

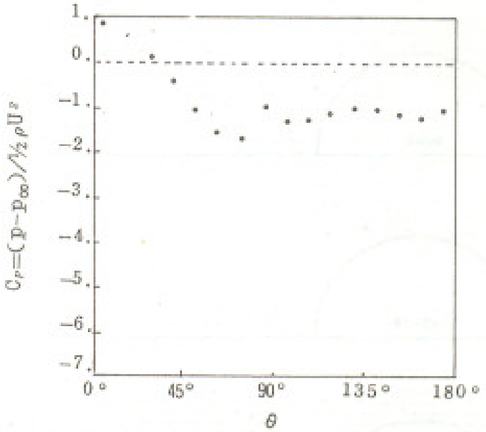



圖16. 圓柱之表面壓力分佈（$U\Delta t/R=0.2$）

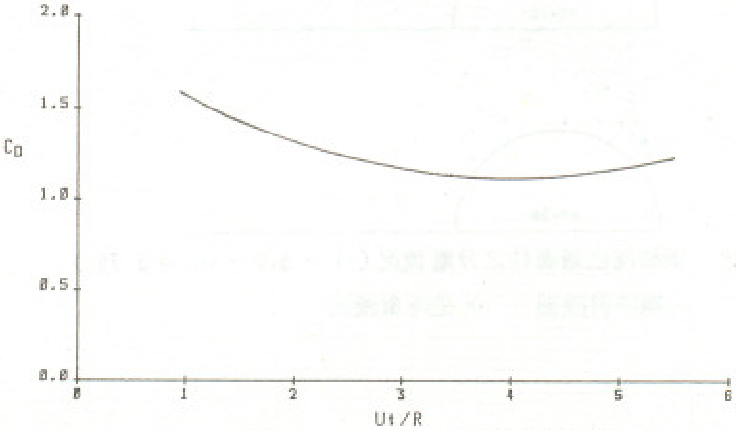



圖17. 等速流經過圓柱抗力係數之時間變化

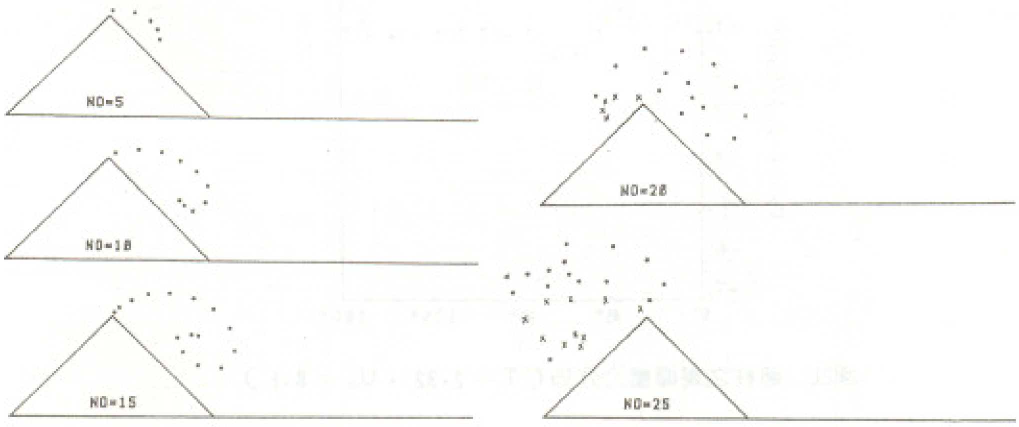



圖18. 振動流經過方形柱體之分離流況（$T=2.84$，$U_m=3.2$）

・順時針旋渦　× 逆時針旋渦

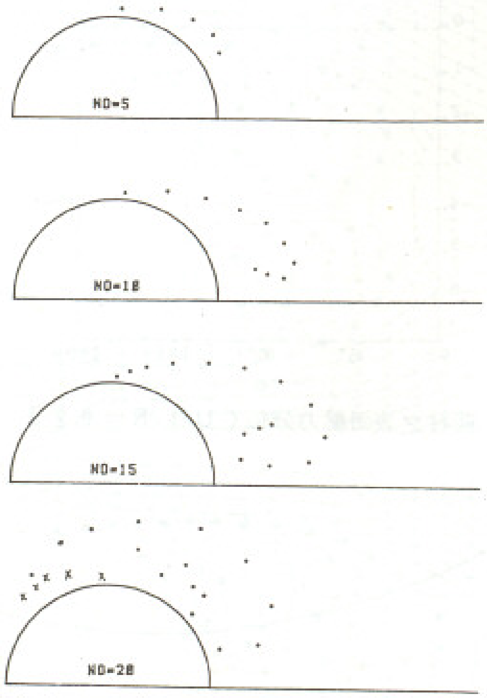



圖19. 振動流經過圓柱之分離流況（$T = 5.0$，$U_m = 3.75$）

・順時針漩渦　　×逆時針漩渦

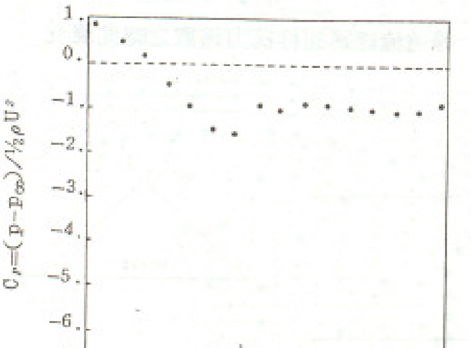
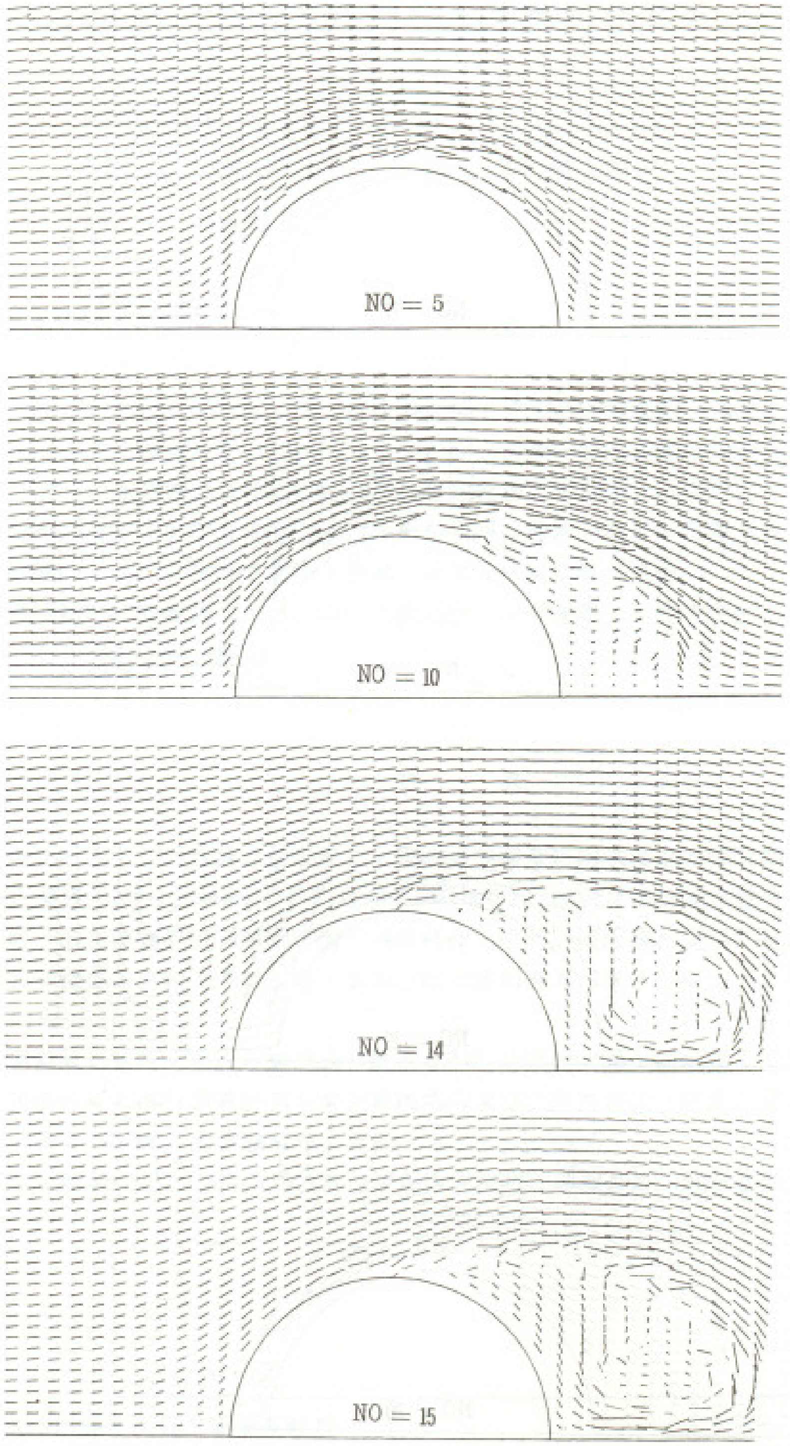



圖21. 圓柱之表面壓力分佈（$T = 2.32$，$U_m = 8.1$）




（續後頁）

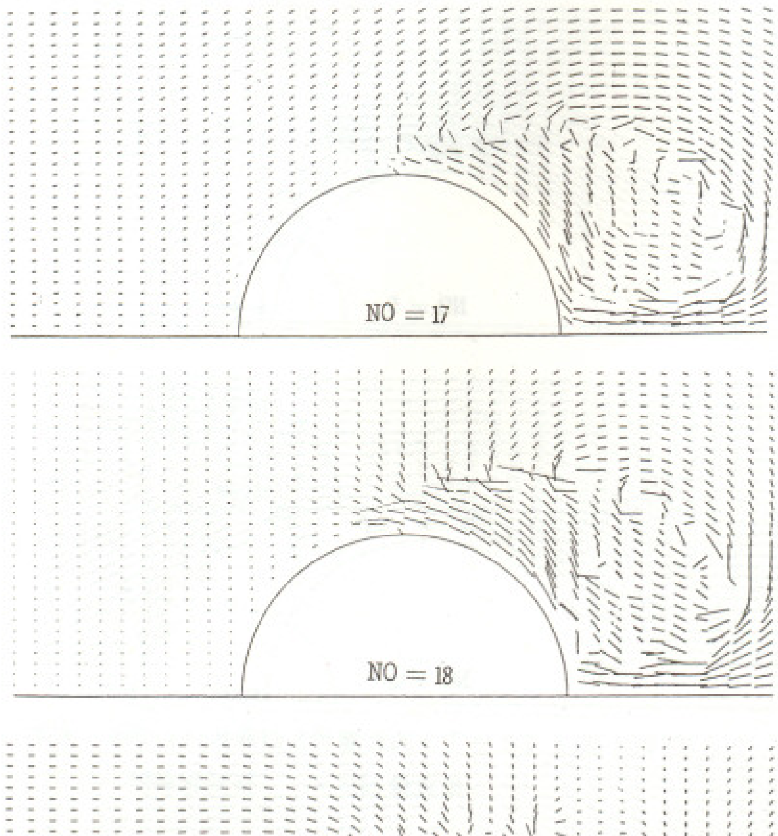



圖20.　振動流經過圓柱之分離流況（ T = 2.32 ， $U_m$ = 8.1 ）