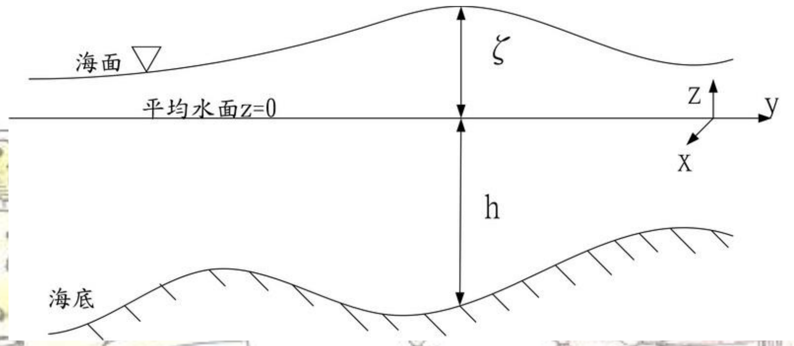
淺水長波運動方程式(Equation of long wave motion in shallow water)



淺水海域，在水平面內取直角座標系(x, y)，z 軸垂直向上，潮流在 x, y 方向分量為 u, v。流體密度一定不可壓縮流的淺水長波連續方程式如下

$$\frac{\partial(\zeta+h)}{\partial t}+\frac{\partial u(\zeta+h)}{\partial x}+\frac{\partial v(\zeta+h)}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

利用下列 Navier-Stokes 方程式描述流的運動

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (4)$$

ρ 為海水密度，P 為壓力，X、Y、Z 為 x、y、z 方向的作用外力。通常包含柯氏力，黏性效應，海面風力效應，海底面摩擦效應及波引起剩餘動量即輻射應力等。

上述 Navier-Stokes 方程式可正確描述流體運動，但是它本身是非常難解的，為了能順利明快分析，通常實際討論時針對該物理現象，有時可忽略一些與該物理現象不重要的因素。例如討論表面波時，因波動主因為重力，黏性效果影響小可將黏性項忽略，將流體視為理想流體。對潮流等長週期波，因係以水平運動為主，可設法忽略垂直運動等。

當 Z=-g，即 z 方向只有靜水壓作用，(4)式左邊的水粒子於 z 方向加速度與重力加速度相比為小，可忽略不計, 即

$$0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (5)$$

即

$$dP = -\rho g dz$$

由海底（z = -h）積分到海面（z = ζ，水位上昇量）時, 得

$$P = \int_{-h}^{\zeta} \rho g dz = P_0 - g\int_{-h}^{\zeta} \rho dz \qquad (6)$$

若假定大氣壓力 P_0 及海水密度 ρ 為一定，x、 y 軸方向的壓力分量為

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial(\zeta + h)}{\partial x}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \frac{\partial(\zeta + h)}{\partial y} \qquad (7)$$

由於淺水長波運動的水深方向規模遠小於水平方向，若海底坡度變化小時因此可忽略，又令 H=ζ+h 而將(2)、(3)式可以改寫為

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad (9)$$

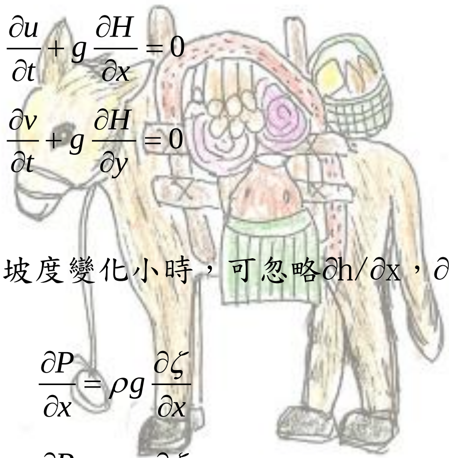
2011 埃及尼羅河之旅

上 2 式分別為 x 及 y 方向的淺水長波運動方程式。

若忽略移流項，得下列線性淺水長波運動方程式。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \qquad (11)$$



若海底坡度變化小時，可忽略∂h/∂x，∂h/∂y，(7)式改寫成

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (12)$$

(8)、(9)式改寫為

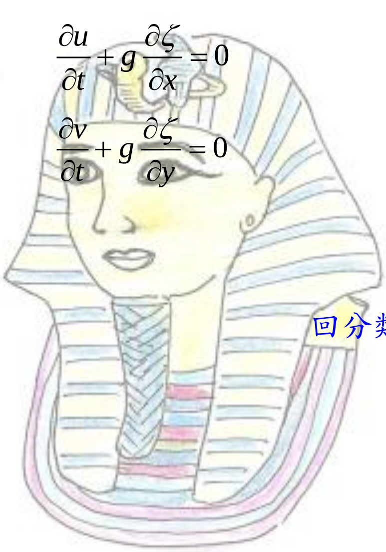
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{14}$$

若忽略移流項，得下列線性淺水長波運動方程式。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{16}$$



載滿珠寶的駱駝

回分類索引　回海洋工作站

2011 埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈