

Lagrange 運動方程式(Lagrange equation)

運動依 **Newton 運動法則**，水粒子的位置向量以 \mathbf{r} ，作用於單位質量的作用力以 \mathbf{F} ，流體密度以 ρ 表示時



載滿珠寶的駱駝

考量流體內的物體，物體表面法線方向單位面積上有 p 的壓力作用。流體運動時除靜壓外，還有動壓作用，表面波對平均水面作上下起伏，有的地方上昇，有的地方下降，因此對某個面的兩側會有 $\partial p / \partial n$ 的壓力梯度存在，此壓力梯度可以向量 $\nabla \cdot p$ 表示，則在流體內上式可以下式表示

$d^2\mathbf{r}/dt^2$ 表示，靜止不動的人觀測流體粒子，開始位於 A ，任意時刻的位置為 \mathbf{r}' 時

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{A}, t)$$

2011 埃及尼羅河之旅

$\partial \mathbf{r} / \partial t$ 及 $\partial^2 \mathbf{r} / \partial t^2$ 分別為水粒子的速度及加速度，上式可改寫成

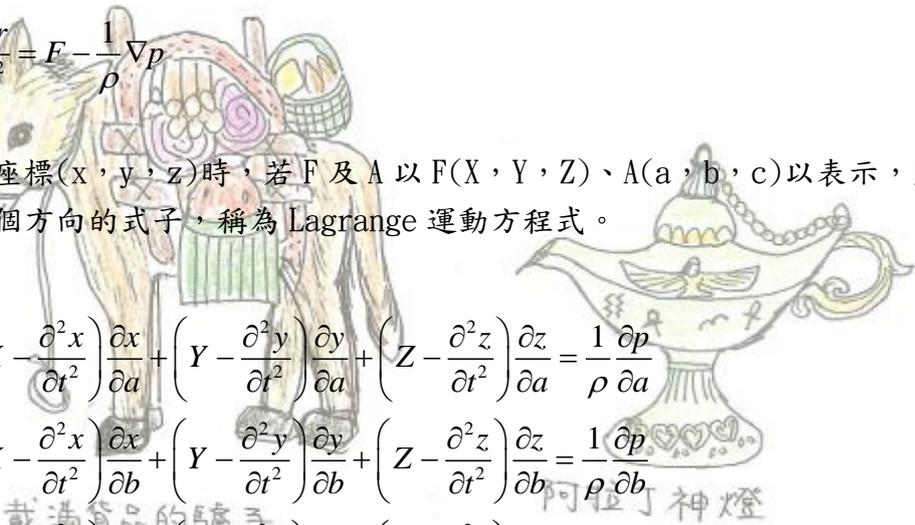
$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

採用直角座標 (x, y, z) 時，若 \mathbf{F} 及 \mathbf{A} 以 $F(X, Y, Z)$ 、 $A(a, b, c)$ 以表示，則可得下式 3 個方向的式子，稱為 Lagrange 運動方程式。

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a}$$

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial b} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial b} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b}$$

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \frac{\partial x}{\partial c} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{\partial y}{\partial c} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \frac{\partial z}{\partial c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c}$$



載滿寶物的駱駝 阿拉丁神燈