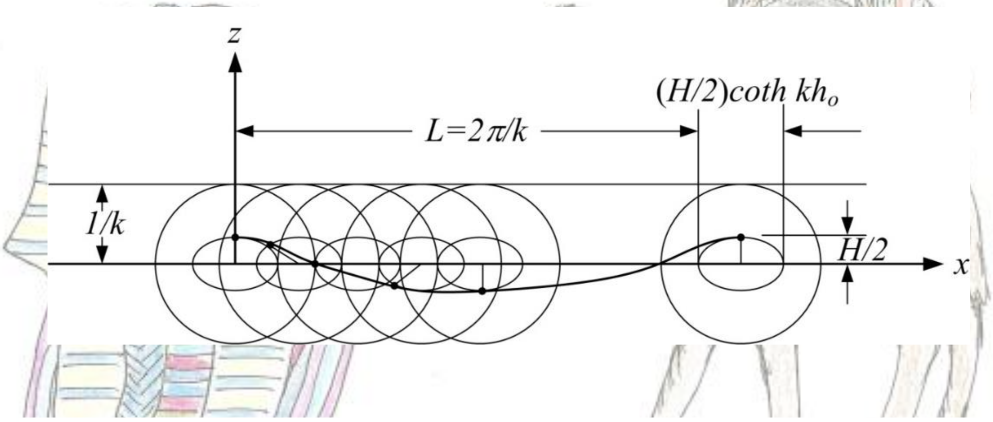
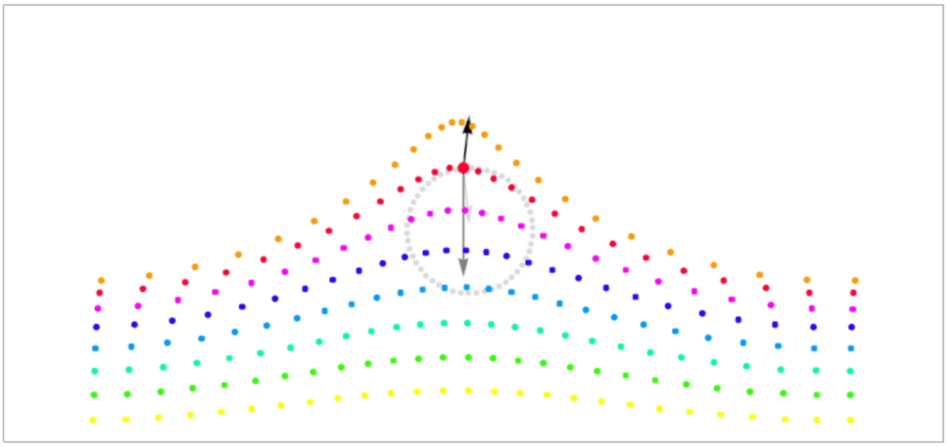
餘擺波 (Trochoidal wave)

Gesnter 氏於 1802 年對深海波利用餘擺(Trochoidal)曲線，導出表示波形的方程式，稱之為餘擺波， Gaillard 氏(1935)則對淺海波導得其結果。





餘擺波水粒子運動(動畫)

採用 Lagrange 方法，運動可以下式表示

$$x = \bar{x} - a\frac{\cosh k\left(\bar{z}+h_0\right)}{\sinh kh_0}\sin(kx-\sigma t)$$

$$z = \bar{z} - a\frac{\sinh k\left(\bar{z}+h_0\right)}{\sinh kh_0}\cos(kx-\sigma t) \qquad (1)$$

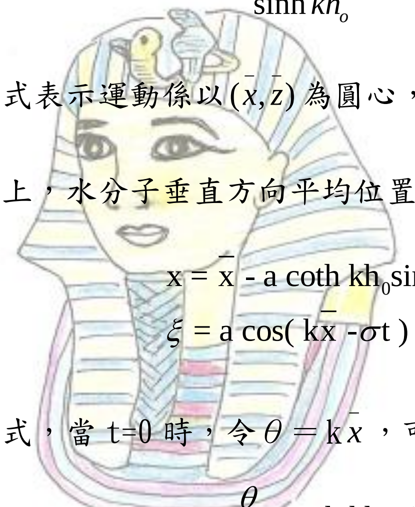
$(\bar{x},\bar{z})$ 表示水分子平均位置，h_0 表示從 x 軸算起的水深。將上式中的時間項消去，得

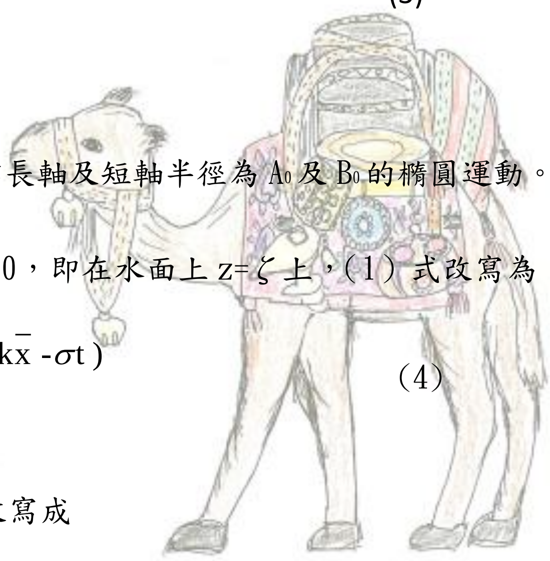
$$\frac{\left(x-\bar{x}\right)^2}{A_0^2}+\frac{\left(z-\bar{z}\right)^2}{B_0^2}=1 \qquad (2)$$

但

$$A_o = a\frac{\cosh k(\bar{z}+h_o)}{\sinh kh_o}$$

$$B_o = a\frac{\sinh k(\bar{z}+h_o)}{\sinh kh_o} \qquad (3)$$





載滿珠寶的駱駝

上式表示運動係以 $(\bar{x},\bar{z})$ 為圓心，作長軸及短軸半徑為 A_0 及 B_0 的橢圓運動。在水面上，水分子垂直方向平均位置 $\bar{z}=0$，即在水面上 $z=\zeta$ 上，(1) 式改寫為

$$x = \bar{x} - a\coth kh_0 \sin(k\bar{x} - \sigma t) \qquad (4)$$
$$\xi = a\cos(k\bar{x} - \sigma t)$$

上式，當 t=0 時，令 $\theta = k\bar{x}$，可改寫成

$$x = \frac{\theta}{k} a\coth kh_0 \sin\theta \qquad (5)$$
$$\zeta = a\cos\theta$$

上式為如圖所示，為橢圓餘擺曲線方程式，在 z＝1/k 的直線下側，作半徑為 1/k 的圓轉動時，與長軸及短軸半徑分別為 $a\coth kh_o$ 及 a 的橢圓運動的交點所描述的曲線。當振幅 a 變小時，因 $x \approx \bar{x}$，得 $\zeta = a\cos(kx - dt)$，即餘擺波波形與簡諧波波形相同。

回到埃及尼羅河之旅

載滿貨品的驢子

回分類索引　回海洋工作站

阿拉丁神燈