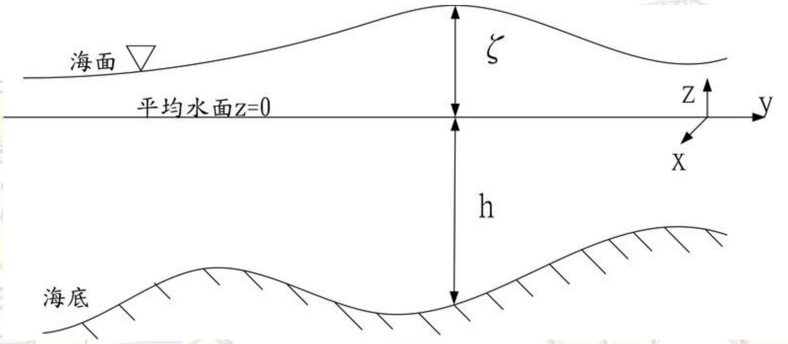
淺水長波支配及振動方程式



淺水海域，在水平面內取直角座標系(x, y), z 軸垂直向上，潮汐流在 x, y 方向分量為 u、v，h 表示水深，水位上昇量為ζ時，淺水長波連續方程式為

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial u(\zeta+h)}{\partial x}+\frac{\partial v(\zeta+h)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

外力僅為重力時，x, y 方向的淺水長波運動方程式為

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{3}$$

將(1)式對時間微分，並將(2)式對 x 微分，(3)式對 y 微分後代入得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-g\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=0$$

即

$$\nabla^2\zeta=\frac{1}{gh}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-\frac{1}{h}\left((1-g)(\nabla\zeta\bullet\nabla h)-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}\right) \tag{4}$$

上式為非線性淺水長波運動支配方程式。

若視潮流為作一定頻率的振動運動，可假定水位 ζ、流速 u、v 作下列簡諧運動，σ 為角週頻率(=$2\pi/T$，T=週期), ζ_0、u_0、v_0為其振幅

$$\begin{cases} \zeta = \zeta_o(x,\ y)e^{(-i\sigma t)} \\ u = u_o(x,\ y)e^{(-i\sigma t)} \\ v = v_o(x,\ y)e^{(-i\sigma t)} \end{cases} \tag{5}$$

將上式代入(4)得

$$\nabla^2\zeta_0 + k^2\zeta_0 = -\frac{1}{h}\left(i\sigma\left(u_0\frac{\partial h}{\partial x} + v_0\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (1-g)\left(\nabla\zeta_0 \bullet \nabla h\right)\right) \tag{6}$$

上式稱為非線性淺水長波振動方程式。

將(2)及(3)式的移流項忽略得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

將(1)式對時間微分，並將(7)式對 x 微分，(8)式對 y 微分後代入，忽略高次項得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) - \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

上式為線性淺水長波運動支配方程式。

當潮流為作一定頻率的振動運動，如上可假定水位 ζ、流速 u、v 作下列簡諧運動，σ 為角週頻率(=2π/T，T=週期)，ζ_0、u_0、v_0 為其振幅時，(7)及(8)式可以下式表示

$$\begin{cases} -i\sigma u_0 + g\dfrac{\partial \zeta_0}{\partial x} = 0 \\ -i\sigma v_0 + g\dfrac{\partial \zeta_0}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

則(9)式可改寫成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}\right) + \frac{\sigma^2}{g}\zeta_0 = 0 \tag{11}$$

將(10)式代入上式得

$$\nabla^2\zeta_0+k^2\zeta_0=-\frac{1}{h}\nabla h\cdot\nabla\zeta_0 \qquad (12)$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

(12)式為線性潮汐流振動方程式，依上式求解ζ_0後，可依下式求解u_0、v_0。

$$\begin{cases} u_0=-\dfrac{i}{\sigma}g\dfrac{\partial\zeta_0}{\partial x} \\ v_0=-\dfrac{i}{\sigma}g\dfrac{\partial\zeta_0}{\partial y} \end{cases} \qquad (13)$$

欲加入考量柯氏力影響時，(10)式可以下式表示

$$\begin{cases} -i\sigma u_0-fv_0+g\dfrac{\partial\zeta_0}{\partial x}=0 \\ -i\sigma v_0+fu_0+g\dfrac{\partial\zeta_0}{\partial y}=0 \end{cases} \qquad (14)$$

f 為柯氏參數，若假設為一定，則(11)式可以下式表示

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}\right)+\frac{1}{g}\left(\sigma^2-f^2\right)\zeta_0=0 \qquad (15)$$

由於$f^2 \ll \sigma^2$，因此線性潮汐流振動方程式，實際以(11)式表示即可。由(11)式解出ζ_0後，可依(13)式求解u_0、v_0。

載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈