非定常熱擴散利用基本解 Bessel 函數法

靜止的流體其溫度一樣，以 $T_{\min}$ 表示，流體的溫度成 T 時，密度 ρ 亦產生變化。溫度上昇時流體膨漲密度減少而產生浮力，溫度下降時密度增加而下沉，並產生流。考量密度變化的質量守恆方程式如下

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2}=0$$

不考量密度變化的質量守恆方程式如下

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0$$

流體的流速分量應滿足下列運動方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}+b_1$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+b_2$$

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

在熱流體問題，因溫度效應引起的物體力為

$$b_1=0$$

$$b_2=\rho g\beta\left(T-T_{\min}\right),\quad \beta=\text{體膨脹率}$$

解析熱流體問題，除連續方程式、運動方程式外必須考量下列能量方程式。

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v_1\frac{\partial T}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial T}{\partial x_2}-\frac{k}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2{}^2}\right)=0$$

將上式無因次化得

$$Pe\left(\dot{\theta}+u_j\theta_{,j}\right)-\theta_{,jj}=0$$

$$Pe=LU/\left(k/\rho c\right)$$

L = 代表長　U = 基準流速

k = 熱傳導率　ρ = 密度　c = 比熱

$$u_j=v_j/U$$

$$\theta=\left(T-T_{min}\right)/\left(T_{max}-T_{Min}\right)\quad T=溫度$$

將能量方程式及渦度輸送方程式對時間作後退差分，移流項以前時刻者近似得下式

$$Pe\left(\frac{\theta-\tilde{\theta}}{\Delta\tau}+u_j\tilde{\theta}_{,j}\right)-\theta_{,jj}=0$$

$$Re\left(\frac{\omega-\tilde{\omega}}{\Delta\tau}+u_j\tilde{\omega}_{,j}\right)-\theta_{,jj}+f_{2,1}=0$$

即得能量方程式如下式

$$\theta-\lambda\theta_{,jj}-S=0$$

$$S=\tilde{\theta}-\Delta\tau u_j\tilde{\theta}_{,j}\qquad\lambda=\Delta\tau/Pe$$

即得渦度方程式如下式

$$\omega-\lambda\omega_{,jj}-S=0$$

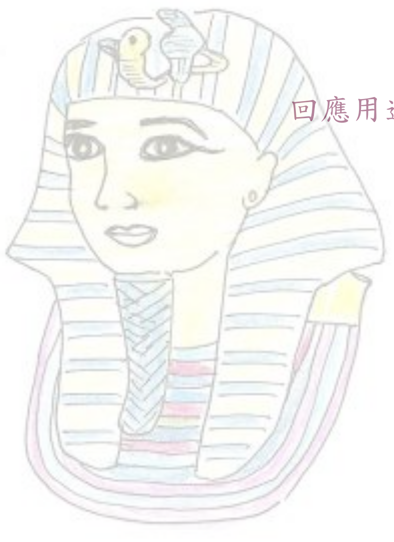
$$S=\tilde{\omega}-\Delta\tau u_j\tilde{\omega}_{,j}+\lambda f_{2,1},\qquad\lambda=\Delta\tau/\mathrm{Re}$$

基本解取下列第 2 類變形 Bessel 函數

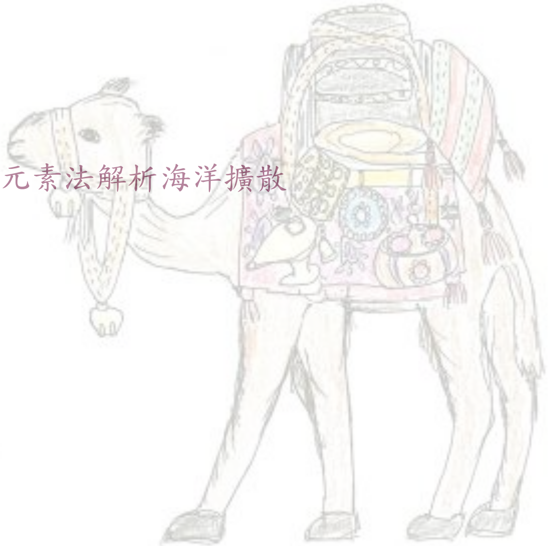
$$W=\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

經如非定常移流擴散利用 Bessel 函數為基本解同樣推導，可得下列積分方程式

$$\gamma\theta(P)+\int\lambda\theta\frac{\partial W}{\partial n}d\Gamma=\int\lambda W\frac{\partial\theta}{\partial n}d\Gamma+\int SWd\Omega$$

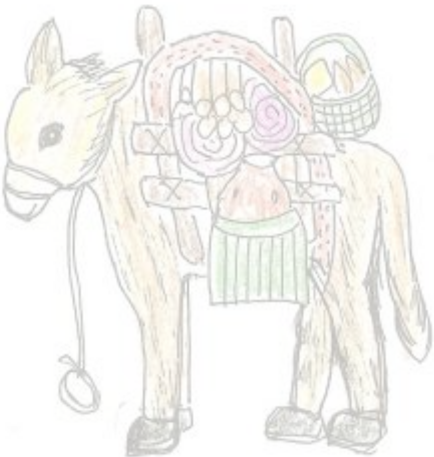


回應用邊界元素法解析海洋擴散



載滿珠寶的駱駝

2011 埃及尼羅河之旅



載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈