非定常移流擴散利用 Bessel 函數為基本解

非定常移流擴散的控制方程式如下

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}-k\nabla^2\theta=0$$

$$\theta=\left(C-C_{\min}\right)/\left(C_{Max}-C_{\min}\right)$$

C=濃度，k=擴散係數，u, v = 流速分量。對時間取後退差分，對移流項的濃度以前時刻者近似，可得

$$\frac{\theta-\tilde{\theta}}{\Delta t}+u\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}+v\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial y}-k\nabla^2\theta=0$$

$\tilde{\theta}$ 表示前時刻的濃度，可將上式改寫如下：

$$\theta-\left[\tilde{\theta}-\Delta t\left(u\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}+v\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial y}\right)\right]-\Delta t\left(k\nabla^2\theta\right)=0$$

令

$$S=\tilde{\theta}-\Delta t\left(u\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x}+v\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial y}\right)$$

$$\lambda=k\Delta t$$

得

$$\theta-\lambda\nabla^2\theta-S=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

將(1)式乘以加權函數 G 並作積分得

$$\int\left(\theta-\lambda\nabla^2\theta-S\right)Gd\Omega=0$$

對上式作 2 次部分積分後展開得

$$\int\theta Gd\Omega-\int\lambda\frac{\partial\theta}{\partial n}Gd\Gamma+\int\lambda\theta\frac{\partial G}{\partial n}d\Gamma-\int\lambda\theta\nabla^2Gd\Omega-\int SGd\Omega=0$$

將第 1 項及第 4 項寫在一起得

$$-\int \theta\left(\lambda\nabla^2 G - G\right)d\Omega - \int \lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} G d\Gamma + \int \lambda \theta \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma - \int S G d\Omega = 0$$

上式第 1 項中，加權函數 G 能滿足下式

$$\lambda\nabla^2 G - G = -\delta(Q-P)$$

若基本解取下列第 2 類變形 Bessel 函數

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

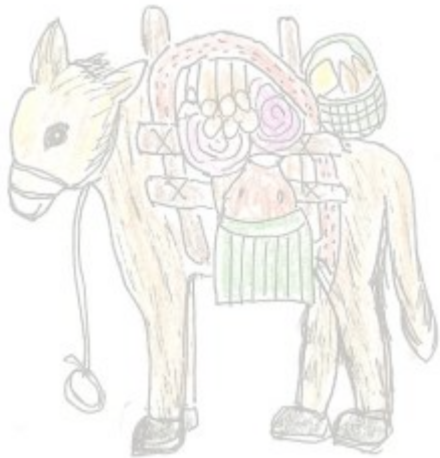
得移流擴散積分方程式如下

$$\gamma\theta(P) + \int \lambda\theta \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = \int \lambda G \frac{\partial \theta}{\partial n} d\Gamma + \int S G d\Omega$$

在邊界上 γ=0.5，在領域內 γ=1。

2011 埃及尼羅河之旅

回應用邊界元素法解析海洋擴散



載滿貨品的驢子

阿拉丁神燈